

**DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA,  
INGENIERÍA ELECTRÓNICA E  
INFORMÁTICA INDUSTRIAL**

**Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales**

**CONTROL VISUAL BASADO EN  
CARACTERÍSTICAS DE UN SISTEMA  
ARTICULADO. ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO DE  
LA IMAGEN UTILIZANDO MÚLTIPLES VISTAS**

**Tesis Doctoral**

Autor

***Pablo Lizardo Pari Pinto***

Ingeniero Electrónico

Director

***José Maria Sebastián y Zúñiga***

Doctor Ingeniero Industrial

**2007**



(D-15)

Tribunal nombrado por el Magnífico. Y Excmo. Sr Rector de la Universidad Politécnica de Madrid, el día \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2007.

Presidente:

Vocal:

Vocal:

Vocal:

Secretario:

Suplente:

Suplente:

Realizado el acto de defensa de la Tesis el día \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2007 en la E.T.S.I.I. / Facultad \_\_\_\_\_.

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO



*A Gregorio y Ubaldina, mis padres.  
A Walter, Miriam, Godofredo y Beatriz, mis hermanos.  
A Nadia, mi sobrina.  
A la 1ra Com. parroquia Lambramani de Arequipa.  
A la 3ra Com. parroquia La Merced de Madrid.*



## RESUMEN

En la presente tesis se aborda el control visual de un sistema de tres grados de libertad utilizando dos cámaras fijas débilmente calibradas. Se trabaja con un esquema de Control Basado en Imagen, y más específicamente en la estimación en línea del jacobiano de la imagen.

Se proponen nuevos algoritmos de estimación del jacobiano de la imagen usando técnicas no iterativas. Estos nuevos algoritmos se basan en la definición de un factor de fiabilidad que depende de los movimientos ya realizados en el espacio de las articulaciones y sus respectivos cambios en las características. Además, se incorporado en la estimación del jacobiano la información de la geometría epipolar, en la figura de la matriz fundamental.

Los resultados de las pruebas llevadas a cabo tanto en tareas de posicionamiento como de seguimiento, y la comparación realizada con los métodos existentes en la bibliografía, demuestran que la incorporación de la geometría epipolar y el factor de fiabilidad en la estimación del jacobiano de la imagen, incrementa la robustez del sistema frente al ruido.

Esta contrastación se ha extendido al jacobiano obtenido mediante un cálculo analítico. Se comprueba que con el método propuesto en la presente tesis se alcanzan las mismas prestaciones que el jacobiano analítico obtenido luego de un riguroso y delicado proceso de calibración de cámaras, calibración cinemática, transformación cámara-robot, jacobiano del robot, y reconstrucción tridimensional. Se verifica la conveniencia de este nuevo método al no depender de las mismas relaciones que el jacobiano analítico.

Se presentan además, dos aplicaciones adicionales de control visual: En la primera de ellas, se describen dos métodos para estimar el jacobiano de la imagen a partir de líneas. En la segunda, se muestra un control visual de robots móviles, utilizando la estimación de la homografía entre un plano del robot y la imagen.



# ABSTRACT

The present thesis deals with the visual servoing of an articular system of 3 d.o.f. using two fixed and weakly calibrated cameras. The servoing architecture is Image Based Visual Servoing, and this work deals specifically with the on-line estimation of the image Jacobian.

New algorithms for the estimation of the image Jacobian with no iterative techniques are proposed. These new algorithms are based on the definition of a reliability factor which depends on both movements already realized into the joint space and their respective feature changes. In addition to the reliability factor, information from the epipolar geometry stand for the fundamental matrix has been also incorporated in the estimation of the image Jacobian.

Experiments have been carried out in both positioning tasks and following tasks. By comparison with the existing methods in the literature, it is showed that the incorporation of the epipolar geometry and the reliability factor in the estimation of the image Jacobian, increases robustness of the system against noise.

Experiment contrasts have been extended to the analytic Jacobian. It is showed that the same performance of the analytic Jacobian is attained with the method proposed in the present thesis. It is well known that the analytic Jacobian is obtained after a severe and delicate work in camera calibration, cinematic calibration, camera-robot transformation, robot Jacobian, and 3D reconstruction. The convenience of the proposed method is proved since this method does not depend on the same relations as the analytic Jacobian.

Furthermore two control visual applications are presented. In the former, two methods of estimation of the image Jacobian from lines are described. In the latter, a visual servoing of mobile robots using the estimation of the homography between a plane and the image is described.



## AGRADECIMIENTOS

A lo largo de mi vida me han sucedido muchas cosas “buenas” y otras “malas”, algunos dirían que las cosas “buenas” son cosas de la casualidad, otros, del destino, otros, de Diós. Yo creo lo último. Mientras que las cosas “malas” son a mi modo de ver, una forma diferente de ver las cosas “buenas”. Una de las denominadas “buenas”, es la presente culminación de los estudios de doctorado que empecé hace algunos años atrás. Con este acontecimiento, se voltea una página del libro de mi vida y formación profesional, abriéndose otra nueva.

Otro acontecimiento perteneciente al grupo de las denominadas “buenas” es el haberme encontrado con Jose María Sebastián, mi director de tesis, quien prácticamente me ha llevado de la mano desde el inicio de la investigación, tomando en cuenta mis posibilidades de conocimiento y habilidades para la programación, y muchas veces me ha dado lecciones de desprendimiento, a quien agradezco profundamente. Estoy seguro de que su nombre ya estaba escrito en los planes que Diós tenía para conmigo. Este acontecimiento me invita a tener siempre en cuenta el muy conocido dicho de “lo que has recibido gratis dadlo gratis”.

También agradezco a los otros profesores del laboratorio de DISAM con quienes he compartido tiempo, ya sea en las aulas o en alguna charla, o hasta en la cafetería, Rafael Aracil, Roque Salтарén, Manolo Ferre, Agustín Jiménez, Ramón Galán, Sergio Domínguez, Pascual Campoy, Ricardo Sanz, Antonio Barrientos, Paco Sastrón, Ernesto Gambao, y Fernando Matía. Extiendo también mi gratitud al profesor Ricardo Carelli del INAUT.

También agradezco a las autoridades y profesores tanto de la Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa y de la Pontificia Universidad Católica del Perú, en la persona de David Chávez y Javier Sotomayor que promovieron y me apoyaron para seguir los presentes estudios.

Agradezco a Carolina González que hizo su proyecto de fin de carrera con nosotros y me ayudó en la programación. A Peter Sturn del INRIA Rhone Alpes que me ayudó con

los temas de reconstrucción 3D. A Luis Angel Silva que me ayudó en los inicios con temas de control visual. A Paulo Sequeiro Concalves del Instituto Politécnico de Castelo Branco que me ayudó con temas del jacobiano del robot. A Luis Mejias que me ayudaba con cualquier tema de hardware o software de PCs. A Flavio Roberti y Carlos Soria que me hicieron sentir como en casa en mi estancia en el INAUT, Argentina.

A los compañeros del laboratorio con quienes he compartido muchos momentos agradables, ya sea en actividades académicas o no académicas, formales o informales, Pedro Gutiérrez, Percy Flores, Cecilia García, Julio Tafur, Maria Escarano, María Artigas, César Peña, César Álvarez, Rodrigo Sanmartín, Ignacio Chang, Eugenio Yimie, Jackelin Quinteros, Juan Correa, Ivan Mondragón, Ilka, Mary, Carol, Alex Martínez, Alexander, Claudio Rossi, Jose Sanpedro, Jose Antonio Calderón, Ignacio Pérez, Jaime Gómez e Iñaki Navarro, Iveth Moreno, Rolando Cerracín, Alberto Traslosheros, Nelvin Andrade y Filadelfio, Guisela y Hector Moreno, Eric, Juan Escalera, y a algún otro que se me olvide: ¡gracias!

También agradezco al personal técnico administrativo que siempre se ha mostrado presto a apoyarnos en todo momento, Carlos Sanchez, Rosa Ortiz, Teresa Olmos, Rosa Molina (de la Escuela), Ángel Martínez, Enrique Pinto, y Jaime del Cerro.

Al personal anónimo que labora en el laboratorio, desde los técnicos que cambian los fluorescentes o arreglan el aire acondicionado u otra cosa, el personal de portería, hasta las señoras que realizan la limpieza. A todos ellos mi agradecimiento.

P. Lizardo Pari P.

# INDICE GENERAL

1	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1	MOTIVACION.....	1
1.2	ENCUADRE DEL PROBLEMA Y CONTRIBUCIONES.....	3
1.3	ESQUEMA GENERAL DE LA TESIS.....	5
1.4	PUBLICACIONES.....	6
1.4.1	PUBLICACIONES REFERENCIADAS EN EL ISI.....	6
1.4.2	CONTRIBUCIONES A CONGRESOS INTERNACIONALES.....	6
1.4.3	CONTRIBUCIONES A CONGRESOS NACIONALES.....	7
2	ESTADO DEL ARTE.....	9
2.1	ESTADO DEL ARTE DEL CONTROL VISUAL.....	9
2.1.1	CONFIGURACIONES CÁMARA-ROBOT.....	10
2.1.1.1	SEGÚN LA MANERA EN QUE ESTÁ DISPUESTA LA CÁMARA RESPECTO AL ROBOT. 10	
2.1.1.2	SEGÚN EL NÚMERO DE CÁMARAS.....	11
2.1.2	ESQUEMAS DE CONTROL VISUAL.....	11
2.1.2.1	EN FUNCIÓN DE LA ESTRUCTURA DE CONTROL.....	11
2.1.2.2	EN FUNCIÓN DE LA DEFINICIÓN DEL ERROR.....	13
2.1.2.3	EN FUNCIÓN DEL CAMPO VISUAL.....	18
2.1.2.4	EN FUNCIÓN DEL MODELO 3D DEL OBJETO.....	18
2.1.2.5	EN FUNCIÓN DEL MODELO VISUAL-MOTOR.....	19
2.1.3	OTRAS TENDENCIAS EN LA INVESTIGACIÓN DEL CONTROL VISUAL.....	20
2.2	ESTADO DEL ARTE DE LA ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO DE LA IMAGEN.....	22
3	MODELOS DE CÁMARAS Y ROBOT.....	27
3.1	MODELO DE UNA CAMARA.....	27
3.1.1	MODELO PINHOLE.....	27
3.1.2	PARÁMETROS INTRÍNSECOS Y EXTRÍNSECOS.....	28
3.1.3	MATRIZ DE PROYECCIÓN.....	30
3.1.4	DISTORSION.....	30
3.1.5	CALIBRACIÓN DE LA CÁMARA.....	32
3.1.5.1	MÉTODO DE ZHANG.....	33
3.2	MODELO DE DOS CAMARAS.....	36
3.2.1	GEOMETRÍA EPIPOLAR.....	36
3.2.2	LA MATRIZ FUNDAMENTAL.....	38
3.2.3	PROPIEDAD DE RESTRICCIÓN EPIPOLAR.....	39
3.2.4	MATRIZ ESENCIAL.....	40
3.2.4.1	RECUPERACIÓN DE $\mathbf{R}$ Y $\mathbf{t}$ A PARTIR DE LA MATRIZ ESENCIAL.....	40
3.2.5	DETERMINACIÓN DE LA MATRIZ FUNDAMENTAL.....	42
3.2.5.1	METODO DE MÍNIMOS CUADRADOS.....	45

3.2.5.2	MÉTODO BASADO EN LA DESCOMPOSICIÓN SINGULAR SVD.	46
3.2.5.3	MÉTODO DE LOS 7 PUNTOS.	47
3.2.5.4	MÉTODO DE MINIMIZAR LA DISTANCIA GEOMÉTRICA A LA CORRESPONDIENTE LÍNEA EPIPOLAR.	47
3.2.5.5	MÉTODO RANSAC.	48
3.2.5.6	MÉTODO DE LA MÍNIMA MEDIANA LMedS.	49
3.2.6	CONSIDERACIONES EN LA DETERMINACIÓN DE LA MATRIZ FUNDAMENTAL. 50	
3.2.6.1	NORMALIZACIÓN DE LOS DATOS DE ENTRADA.	50
3.2.6.2	RESTRICCIÓN DE SINGULARIDAD.	51
3.2.7	HOMOGRAFIA ENTRE DOS VISTAS.	51
3.2.8	RELACION ENTRE HOMOGRAFÍAS Y LA MATRIZ FUNDAMENTAL.	54
3.2.9	CALIBRACIÓN DEL PAR ESTÉREO.	57
3.2.10	RECONSTRUCCIÓN TRIDIMENSIONAL.	58
3.2.10.1	MINIMIZAR LA DISTANCIA DE LOS RAYOS REPROYECTADOS.	58
3.3	MODELO DEL ROBOT.	60
3.3.1	CÁLCULO DE LA CINEMÁTICA DIRECTA.	61
3.3.2	CÁLCULO DE LA CINEMÁTICA DIFERENCIAL.	62
3.3.3	CASO DE EJES DE ROTACIÓN QUE NO SE CORTAN.	63
3.3.4	CÁLCULO DE LA CINEMÁTICA DIFERENCIAL PARA EL CASO DE EJES NO ALINEADOS.	65
3.4	RESULTADOS EXPERIMENTALES.	65
3.4.1	ENTORNO DE PRUEBAS.	65
3.4.1.1	HARDWARE.	65
3.4.1.2	SOFTWARE.	67
3.4.1.3	CARACTERÍSTICAS VISUALES.	68
3.4.2	ESTIMACION DE LA MATRIZ FUNDAMENTAL.	70
3.4.3	RECUPERACIÓN DE LA ROTACIÓN Y LA TRASLACIÓN A PARTIR DE LA MATRIZ FUNDAMENTAL:	75
3.4.4	RECUPERACIÓN DE LA ROTACIÓN, TRASLACIÓN Y ORIENTACIÓN A PARTIR DE HOMOGRAFÍAS.	76
3.4.5	DETERMINACIÓN DE LA SEPARACIÓN ENTRE LOS EJES DE ROTACION DEL SISTEMA ARTICULAR MEDIANTE VISIÓN.	79
3.5	CONCLUSIONES.	84
4	ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO DE LA IMAGEN.	85
4.1	INTRODUCCIÓN.	85
4.2	JACOBIANO DE LA IMAGEN.	86
4.2.1	JACOBIANO DE UN PUNTO.	86
4.2.2	JACOBIANO DE UNA LÍNEA.	88
4.3	JACOBIANO VISUAL-MOTOR.	88
4.4	CASO DE DOS O MÁS CÁMARAS.	89
4.5	CONSIDERACIONES PREVIAS EN LA ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO.	90
4.6	ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO CON MÉTODOS NO ITERATIVOS.	91
4.6.1	ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO EN BASE A LOS $N$ ÚLTIMOS MOVIMIENTOS.	92
4.7	ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO CON MÉTODOS ITERATIVOS.	93
4.7.1	MÉTODO DE BROYDEN.	93
4.7.2	UTILIZANDO EL FILTRO DE KALMAN.	93
4.7.3	MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS RECURSIVOS.	94
4.8	NUEVOS ALGORITMOS DE ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO.	95
4.8.1	BASADOS EN LA FIABILIDAD.	95
4.8.1.1	$M$ MOVIMIENTOS MÁS FIABLES DE LOS $N$ ÚLTIMOS.	96
4.8.1.2	$M$ MOVIMIENTOS MÁS FIABLES.	96
4.8.1.3	$N$ ÚLTIMOS MOVIMIENTOS PONDERADOS POR SU FIABILIDAD.	97
4.8.2	MÉTODO DE ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO DE LA IMAGEN BASADO EN LA MATRIZ FUNDAMENTAL.	97
4.9	EXPERIMENTOS.	100
4.10	CONCLUSIONES.	110
5	TAREAS DE CONTROL.	111
5.1	LEY DE CONTROL ESTÁTICA.	112

5.1.1	ANÁLISIS DE ESTABILIDAD.....	113
5.2	LEY DE CONTROL DINÁMICA.....	114
5.3	EXPERIMENTOS Y RESULTADOS.....	114
5.3.1	ENTORNO DE PRUEBAS.....	115
5.3.2	INDICES DE EVALUACIÓN.....	116
5.3.3	ESPACIO DE TRABAJO.....	117
5.3.4	CASO ESTÁTICO.....	117
5.3.5	CASO DINÁMICO.....	138
5.3.6	CONCLUSIONES.....	150
5.3.6.1	CASO ESTÁTICO.....	150
5.3.6.2	CASO DINÁMICO.....	150
5.3.6.3	CONCLUSIONES GENERALES.....	151
6	JACOBIANO ANALÍTICO DE LA IMAGEN.....	153
6.1	EXPRESIÓN DEL JACOBIANO ANALÍTICO DE LA IMAGEN.....	153
6.2	CALIBRACIÓN CÁMARA-ROBOT.....	156
6.2.1	ESTRATEGIA DE ENCONTRAR TRANSFORMACIÓN 3D RÍGIDA ENTRE DOS SISTEMAS DE COORDENADAS POR EL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN SINGULAR SVD. 157	
6.3	EXPERIMENTOS REALIZADOS.....	159
6.3.1	DETERMINACIÓN DE LA POSICIÓN DE LOS CINCO PUNTOS DEL PATRÓN EN EL SISTEMA DEL TERCER ESLABÓN.....	159
6.3.1.1	DETERMINACIÓN DE LA DISTANCIA $\delta$ .....	159
6.3.1.2	DETERMINACIÓN DE LOS PUNTOS DEL PATRÓN EN EL SISTEMA DE COORDENADAS DEL TERCER ESLABÓN.....	160
6.3.2	RESULTADOS DE COMPARAR EL JACOBIANO ANALÍTICO DE LA IMAGEN Y EL JACOBIANO ESTIMADO.....	162
6.3.2.1	CASO ESTÁTICO.....	162
6.3.2.2	CASO DINÁMICO.....	177
6.4	CONCLUSIONES.....	189
6.4.1	DEL JACOBIANO ANALÍTICO.....	189
6.4.2	DE LA CALIBRACIÓN CÁMARA-ROBOT.....	189
6.4.3	DE LA COMPARACIÓN ENTRE EL JACOBIANO ESTIMADO Y EL JACOBIANO ANALÍTICO.....	190
7	CONTROL VISUAL A PARTIR DE LÍNEAS.....	191
7.1	INTRODUCCIÓN.....	191
7.2	REPRESENTACIÓN DE LÍNEAS.....	192
7.3	MATRIZ DE INTERACCIÓN A PARTIR DE LÍNEAS.....	194
7.4	MÉTODOS DE CONTROL PROPUESTOS.....	194
7.4.1	PRIMER MÉTODO.....	194
7.4.2	SEGUNDO MÉTODO.....	195
7.5	LEY DE CONTROL.....	196
7.6	EXPERIMENTOS REALIZADOS.....	196
7.6.1	TAREA DE ALINEAMIENTO.....	197
7.7	CONCLUSIONES.....	203
8	APLICACIÓN A ROBOTS MÓVILES.....	205
8.1	MODELO DEL ROBOT MOVIL.....	206
8.2	MEDIDAS VISUALES DE LA POSICIÓN Y ORIENTACIÓN DEL OBJETO DE CONTROL.....	207
8.3	DETECCIÓN VISUAL.....	207
8.3.1	MEDIANTE LA PROYECCIÓN EN PERSPECTIVA Y RELACIONES GEOMÉTRICAS.....	208
8.3.2	MEDIANTE TRANSFORMACIONES PROYECTIVAS.....	210
8.4	SIMULACIÓN DE LA DETECCIÓN VISUAL.....	211
8.4.1	PRUEBAS REALIZADAS.....	211
8.4.1.1	CONDICIONES IDEALES.....	212
8.4.1.2	VARIACIÓN DE LOS PARÁMETROS EXTRÍNSECOS.....	214
8.4.1.3	INTRODUCCIÓN DE RUIDO.....	216
8.4.2	PRECISIÓN DE LOS RESULTADOS.....	218
8.5	EXPERIMENTOS DE CONTROL REALIZADOS.....	220

8.6	CONCLUSIONES. ....	223
8.6.1	DE LA SIMULACIÓN. ....	223
8.6.2	DE LA EJECUCIÓN DE LA TAREA DE CONTROL. ....	223
9	CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS. ....	225
9.1	CONCLUSIONES Y APORTACIONES. ....	225
9.2	TRABAJOS FUTUROS. ....	228
ANEXO A	.....	231
ANEXO B	.....	235
ANEXO C	.....	239
ANEXO D	.....	241
ANEXO E	.....	247
BIBLIOGRAFÍA	.....	251

# INDICE DE FIGURAS

Figura 3.1.- modelo pinhole de la cámara.....	28
Figura 3.2.- Parámetros intrínsecos de la cámara.....	29
Figura 3.3.- Distorsión radial y tangencial.....	31
Figura 3.4.- Objetos de calibración: a) planar b) cúbica.....	33
Figura 3.5.- Relaciones geométricas de las proyecciones de un punto 3D en un sistema epipolar de dos vistas.....	37
Figura 3.6.- Planos epipolares.....	38
Figura 3.7.- Métodos de estimación de la matriz fundamental.....	44
Figura 3.8.- Comparación entre un método lineal y otro robusto.....	45
Figura 3.9.- Transformación proyectiva $\mathbf{H}_{ik}$ entre los planos $\pi_k$ y $\pi_i$ .....	51
Figura 3.10.- Dos vistas de un plano 3D.....	52
Figura 3.11.- Cálculo del epipolo en la segunda imagen por el método de paralaje virtual.....	56
Figura 3.12.- Transformaciones entre el sistema del mundo y cada cámara.....	57
Figura 3.13.- Reconstrucción tridimensional del punto $\mathbf{M}$ en un sistema de dos cámaras, minimizando la distancia de los rayos reproyectados.....	59
Figura 3.14.- Sistemas de referencia del robot para calcular la cinemática directa por el método de Denavit-Hartenberg.....	60
Figura 3.15.- Sistemas de referencia del robot para calcular la cinemática directa por el método de Denavit-Hartenberg, considerando el desplazamiento entre los ejes de rotación del segundo y tercer eslabón.....	63
Figura 3.16.- Entorno de pruebas.....	66
Figura 3.17.- Esquema del sistema articular.....	67
Figura 3.18.- Controlador del sistema articular.....	67
Figura 3.19.- Sistema articular con patrón de calibración.....	68
Figura 3.20.- Sistema articular con patrón de cinco puntos.....	69
Figura 3.21.- Patrón de cinco puntos y su numeración.....	69
Figura 3.22.- Sistema articular con patrón triangular.....	70
Figura 3.23.- Imágenes izquierda y derecha del patrón de calibración.....	71
Figura 3.24.- Error medio VS número de puntos.....	72
Figura 3.25.- Error máximo VS número de puntos.....	72
Figura 3.26.- Error medio VS ruido gaussiano.....	73
Figura 3.27.- Error máximo VS ruido gaussiano.....	73
Figura 3.28.- Error medio VS ruido aleatorio.....	74
Figura 3.29.- Error máximo VS ruido aleatorio.....	74
Figura 3.30.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, basada en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{t}$ escalada recuperadas a partir de la matriz fundamental, $\mathbf{t}$ escalada por 2.....	75

Figura 3.31.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, basada en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{t}$ escalada recuperadas a partir de la matriz fundamental, $\mathbf{t}$ escalada por 20.	76
Figura 3.32.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, a partir de $\mathbf{R}$ y $\mathbf{t}$ verdaderas.	76
Figura 3.33.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, basada en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{t}$ escalada recuperadas a partir de $\mathbf{H}_1$ , $\mathbf{t}$ escalada por 100	77
Figura 3.34.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, basada en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{t}$ escalada recuperadas a partir de $\mathbf{H}_1$ , $\mathbf{t}$ escalada por 900	77
Figura 3.35.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, basada en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{t}$ escalada recuperadas a partir de $\mathbf{H}_2$ , $\mathbf{t}$ escalada por 100.	78
Figura 3.36.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, basada en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{t}$ escalada recuperadas a partir de $\mathbf{H}_2$ , $\mathbf{t}$ escalada por 900.	78
Figura 3.37.- Trayectorias circulares y centros de giro generadas por cada uno de los cinco puntos del patrón, al girar $\theta_3$ cuando $\theta_2 = 0$	80
Figura 3.38.- Trayectorias circulares y centros de giro generadas por cada uno de los cinco puntos de la plataforma, al girar $\theta_3$ cuando $\theta_2 = -13000$	80
Figura 3.39.- Trayectorias circulares y centros de giro generadas por cada uno de los cinco puntos del patrón, al girar $\theta_3$ cuando $\theta_2 = 13000$	81
Figura 3.40.- Trayectorias circulares y centros de giro generados por cada uno de los cinco puntos del patrón, al girar $\theta_2$ cuando $\theta_3 = 20000$	81
Figura 3.41.-Trayectorias circulares y centros de giro generados por cada uno de los cinco puntos del patrón, al girar $\theta_2$ cuando $\theta_3 = 40000$	82
Figura 3.42.-Trayectorias circulares y centros de giro generados por cada uno de los cinco puntos del patrón, al girar $\theta_2$ cuando $\theta_3 = 60000$	82
Figura 3.43.-Ejes de giro obtenidos halladas para el segundo eslabón (negro) y para el tercer eslabón en las posiciones $\theta_2 = 0$ (rojo) $\theta_2 = -13000$ (verde) y $\theta_2 = -26000$ (azul), $\theta_2 = 13000$ (magenta) y $\theta_2 = 26000$ (cian).	83
Figura 3.44.-Vista en detalle de los 5 ejes de rotación (horizontales) del tercer eslabón obtenidos, con el eje de rotación (vertical) del segundo eslabón visto de canto (color negro).	83
Figura 4.1.- Trayectoria de 15 posiciones en el espacio de trabajo.	101
Figura 4.2.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de 3+REL, cámara izquierda.	102
Figura 4.3.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de 10+REL, cámara izquierda.	102
Figura 4.4.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de 10LASTW, cámara izquierda.	103
Figura 4.5.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de FUNDMAT, cámara izquierda.	103
Figura 4.6.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de 3LAST, cámara izquierda.	104
Figura 4.7.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de BROYDEN, cámara izquierda.	104
Figura 4.8.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de RLS, cámara izquierda.	105
Figura 4.9.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de KALMAN, cámara izquierda.	105
Figura 4.10.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de 3+REL, con ruido añadido, cámara izquierda.	106
Figura 4.11.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de 10+REL con ruido añadido, cámara izquierda.	106

Figura 4.12.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de 10LASTW, con ruido añadido, cámara izquierda.	107
Figura 4.13.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de FUNDMAT con ruido añadido, cámara izquierda.	107
Figura 4.14.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de 3LAST, con ruido añadido, cámara izquierda.	108
Figura 4.15.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de BROYDEN, con ruido añadido, cámara izquierda.	108
Figura 4.16.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de RLS, con ruido añadido, cámara izquierda.	109
Figura 4.17.- Valores singulares de $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ estimando $\mathbf{J}$ con el algoritmo de KALMAN, con ruido añadido, cámara izquierda.	109
Figura 5.1.- Esquema de control basado en características.	112
Figura 5.2.- Esquema general de control.	115
Figura 5.3.- Trayectoria con sobreoscilación. El índice 3 mide las distancias $d_1$ , $d_2$ y $d_3$ .	117
Figura 5.4.- Posiciones de referencia para el caso estático.	118
Figura 5.5.- Índice 0 sin ruido.	119
Figura 5.6.- Índice 1 sin ruido.	120
Figura 5.7.- Índice 2 sin ruido.	120
Figura 5.8.- Índice 3 sin ruido.	121
Figura 5.9.- Índice 4: tiempo promedio de estimación del jacobiano	121
Figura 5.10.- Índice 0 con ruido.	123
Figura 5.11.- Índice 1 con ruido.	123
Figura 5.12.- Índice 2 con ruido.	124
Figura 5.13.- Índice 3 con ruido.	124
Figura 5.14.- Relación con/sin ruido para el índice 0	125
Figura 5.15.-Relación con/sin ruido para el índice 1	125
Figura 5.16.-Relación con/sin ruido para el índice 2	126
Figura 5.17.-Relación con/sin ruido para el índice 3	126
Figura 5.18.- Evolución articular para el algoritmo 3LAST	127
Figura 5.19.- Evolución articular para el algoritmo 3+REL	128
Figura 5.20.- Evolución articular para el algoritmo 10LASTW	129
Figura 5.21.- Evolución articular para el algoritmo 10+REL	130
Figura 5.22.- Evolución articular para el algoritmo FUNDMAT	131
Figura 5.23.- Evolución articular para el algoritmo BROYDEN	132
Figura 5.24.- Evolución articular para el algoritmo RLS	133
Figura 5.25.- Evolución articular para el algoritmo KALMAN	134
Figura 5.26.-Índice 0 con ruido gaussiano de $\sigma = 1$ para	135
Figura 5.27.-Índice 1 con ruido gaussiano de $\sigma = 1$ para	135
Figura 5.28.- Índice 2 con ruido gaussiano de $\sigma = 1$ para	136
Figura 5.29.- Índice 3 con ruido gaussiano de $\sigma = 1$ para	136
Figura 5.30.- Evolución articular para FUNDMAT con ruido de $\sigma = 1$	137
Figura 5.31.- Evolución articular para RLS con ruido de $\sigma = 1$	137
Figura 5.32.- Trayectoria a seguir para el caso dinámico.	138
Figura 5.33.- Índice 0 sin ruido.	139
Figura 5.34.- Índice 5 sin ruido.	140
Figura 5.35.- índice 0 con ruido	141
Figura 5.36.- Índice 5 con ruido	141
Figura 5.37.- Evolución articular para el algoritmo 3LAST	142
Figura 5.38.- Evolución articular para el algoritmo 3+REL	143
Figura 5.39.- Evolución articular para el algoritmo 10LASTW	144
Figura 5.40.- Evolución articular para el algoritmo 10+REL	145
Figura 5.41.- Evolución articular para el algoritmo FUNDMAT	146
Figura 5.42.- Evolución articular para el algoritmo BROYDEN	147

Figura 5.43.- Evolución articular para el algoritmo RLS .....	148
Figura 5.44.- Evolución articular para el algoritmo KALMAN.....	149
Figura 6.1.- Configuración cámara fija con las diferentes transformaciones.....	154
Figura 6.2.- Relación entre las coordenadas del robot y las de la cámara.....	156
Figura 6.3.- N puntos medidos en dos sistemas de coordenadas diferentes.....	156
Figura 6.4.- Un movimiento con dos posiciones adyacentes del efector final unido a la cámara.....	157
Figura 6.5.- Posición de la plataforma en el sistema del tercer eslabón donde se indica la distancia $\delta$ del plano de la plataforma al eje $Y_3$ del sistema del tercer eslabón.....	159
Figura 6.6.-Vista de canto del eje $Y_3$ del sistema del tercer eslabón con los arcos descritos por cada uno de los cinco puntos del patrón en la posición ( $d_1 = 0, \theta_2 = 0$ ). Se muestra la posición de la plataforma que contiene el patrón de cinco puntos.....	160
Figura 6.7.-Ubicación de cada uno de los cinco puntos del patrón en el plano de la plataforma, en relación al sistema de coordenadas de la cámara 1.....	161
Figura 6.8.- Índice 0 sin ruido .....	163
Figura 6.9.- Índice 1 sin ruido.....	163
Figura 6.10.- Índice 2 sin ruido.....	164
Figura 6.11.- Índice 3 sin ruido.....	164
Figura 6.12.- Índice 4: tiempo promedio de estimación del jacobiano de la imagen en ms.....	165
Figura 6.13.- Índice 0 con ruido.....	166
Figura 6.14.- Índice 1 con ruido.....	166
Figura 6.15.- Índice 2 con ruido.....	167
Figura 6.16.- Índice 3 con ruido.....	167
Figura 6.17.- Índice 4 con ruido.....	168
Figura 6.18.- Evolución articular para 3LAST.....	169
Figura 6.19.- Evolución articular para FUNDMAT.....	170
Figura 6.20.- Evolución articular para el método RLS.....	171
Figura 6.21.- Evolución articular para el método de BROYDEN.....	172
Figura 6.22.- Evolución articular para el jacobiano analítico.....	173
Figura 6.23.- Índice 0 con ruido.....	174
Figura 6.24.- Índice 1 con ruido.....	174
Figura 6.25.- Índice 2 con ruido.....	175
Figura 6.26.- Índice 3 con ruido.....	175
Figura 6.27.- Evolución articular para FUNDMAT $\sigma = 1$ .....	176
Figura 6.28.- Evolución articular para el jacobiano analítico con perturbación de la transformación cámara-robot del 5%, para $\sigma = 0$ .....	176
Figura 6.29.- Evolución articular para el jacobiano analítico con perturbación de la transformación cámara-robot del 5%, para $\sigma = 1$ .....	177
Figura 6.30.- Índice 0 sin ruido caso dinámico.....	178
Figura 6.31.- Índice 1 sin ruido caso dinámico.....	178
Figura 6.32.- Índice 5 sin ruido caso dinámico.....	179
Figura 6.33.- Índice 0 con ruido caso dinámico.....	179
Figura 6.34.- Índice 1 con ruido caso dinámico.....	180
Figura 6.35.- Índice 5 con ruido caso dinámico.....	180
Figura 6.36.- Evolución articular para el método 3LAST caso dinámico.....	181
Figura 6.37.- Evolución articular para el método FUNDMAT caso dinámico.....	182
Figura 6.38.- Evolución articular para el método RLS caso dinámico.....	183
Figura 6.39.- Evolución articular para el método de BROYDEN caso dinámico.....	184
Figura 6.40.- Evolución articular para el jacobiano ANALÍTICO caso dinámico.....	185
Figura 6.41.- Índice 0.....	186
Figura 6.42.- Índice 1.....	186
Figura 6.43.- Índice 5.....	187
Figura 6.44.- Evolución articular para el método FUNDMAT $\sigma = 1$ , caso dinámico.....	187
Figura 6.45.- Evolución articular para el jacobiano analítico con perturbación de la transformación cámara-robot del 5%, caso dinámico.....	188
Figura 7.1.- Interpretación geométrica de las coordenadas normalizadas de Plüker.....	192

Figura 7.2.- Dos vistas de una línea 3D y sus planos de interpretación.....	193
Figura 7.3.- Representación normal de una línea.....	194
Figura 7.4. Método NORM, error medio en % VS número de iteraciones usando una línea, casos: sin ruido, y con ruido añadido de $\sigma = 0.3$ y $\sigma = 0.5$ .....	197
Figura 7.5. Método THRH, error medio en % VS número de iteraciones usando una línea, casos: sin ruido, y con ruido añadido de $\sigma = 0.3$ y $\sigma = 0.5$ .....	198
Figura 7.6. Método ANALITICO, error medio en % VS número de iteraciones usando una línea, casos: sin ruido, y con ruido añadido de $\sigma = 0.5$ y $\sigma = 1.0$ .....	198
Figura 7.7. Método NORM, error medio en % VS número de iteraciones para usando tres líneas, casos: sin ruido, y con ruido añadido de $\sigma = 0.2$ .....	199
Figura 7.8. Método THRH, error medio en % VS número de iteraciones para usando tres líneas, casos: sin ruido, y con ruido añadido de $\sigma = 0.3$ y $\sigma = 0.5$ .....	199
Figura 7.9. Método ANALITICO, error medio en % VS número de iteraciones usando tres líneas, casos: sin ruido, y con ruido añadido de $\sigma = 0.5$ y $\sigma = 1.0$ .....	200
Figura 7.10. Evolución en articulaciones para 10 posiciones, método NORM considerando una línea sin ruido. ....	201
Figura 7.11. Evolución en articulaciones para 10 posiciones, método THRH considerando una línea sin ruido. ....	201
Figura 7.12. Evolución en articulaciones para 10 posiciones, método ANALÍTICO considerando una línea sin ruido.....	202
Figura 8.1.- Estructura de control del robot móvil.....	205
Figura 8.2.- Descripción geométrica del robot móvil.....	206
Figura 8.3.- Dimensiones del patrón.....	207
Figura 8.4.- Posición relativa entre el robot móvil y el vehículo objetivo.....	207
Figura 8.5.- Localización del objetivo respecto a la cámara.....	208
Figura 8.6.- Imagen del patrón de marcas en una posición general.....	208
Figura 8.7.- Evolución espacial del vehículo objetivo.....	212
Figura 8.8.- Errores método geométrico con $t_y=0$ ; $a_x=0$ ; $a_z=0$ ; $\sigma=0$ .....	213
Figura 8.9.- Errores método por homografía con $t_y=0$ ; $a_x=0$ ; $a_z=0$ ; $\sigma=0$ .....	213
Figura 8.10.- Errores método geométrico con $t_y=0$ ; $a_x=5$ ; $a_z=0$ ; $\sigma=0$ .....	214
Figura 8.11.- Errores método por homografía con $t_y=0$ ; $a_x=5$ ; $a_z=0$ ; $\sigma=0$ .....	215
Figura 8.12.- Errores método geométrico con $t_y=0$ ; $a_x=0$ ; $a_z=0$ ; $\sigma=1$ .....	216
Figura 8.13.- Errores método por homografía con $t_y=0$ ; $a_x=0$ ; $a_z=0$ ; $\sigma=1$ .....	216
Figura 8.14.- Errores método geométrico con $t_y=20$ ; $a_x=2.5$ ; $a_z=2.5$ ; $\sigma=2.5$ .....	217
Figura 8.15.- Errores método por homografía con $t_y=20$ ; $a_x=2.5$ ; $a_z=2.5$ ; $\sigma=2.5$ .....	218
Figura 8.16.-Elemento se seguimiento.....	219
Figura 8.17.- Imagen procesada del elemento de seguimiento.....	219
Figura 8.18.- Robot utilizado en el experimento.....	220
Figura 8.19.- Evolución de la distancia al vehículo objetivo.....	220
Figura 8.20.- Evolución de los ángulos $\varphi$ y $\theta$ .....	221
Figura 8.21.- Acciones de control.....	222
Figura 8.22.- Velocidad estimada del objetivo.....	222
Figura 8.23.- Trayectoria seguida por el robot móvil seguidor.....	222



# INDICE DE TABLAS

Tabla 3.1.- Parámetros de Denavit-Hartenberg del robot.....	61
Tabla 3.2.- Parámetros de Denavit-Hartenberg del robot considerando el desplazamiento $a_{2c}$ entre los ejes de rotación del segundo y tercer eslabón.....	64
Tabla 3.3.- Nomenclatura de los métodos implementados.....	71
Tabla 3.4.- Colores que representan a los puntos del patrón.....	79
Tabla 4.1.- Nomenclatura de los algoritmos implementados.....	100
Tabla 5.1.- Espacio de trabajo del sistema articular.....	117
Tabla 5.2.- Valores para los 4 índices para los algoritmos considerados sin ruido añadido.....	119
Tabla 5.3.- Valores para los 4 índices para los algoritmos considerados con ruido añadido.....	122
Tabla 5.4.- Valores de los índices para los algoritmos considerados en pruebas sin ruido añadido.....	139
Tabla 5.5.- Valores de los índices para los algoritmos considerados en pruebas con ruido añadido.....	140
Tabla 6.1.- Coordenadas de cada uno de los cinco puntos del patrón en el sistema de coordenadas de la primera cámara.....	160
Tabla 6.2.- Coordenadas de cada uno de los cinco puntos del patrón en el sistema de coordenadas del tercer eslabón.....	161
Tabla 6.3.- Valores para los 5 índices para el jacobiano analítico, caso estático, sin ruido y con ruido añadido de $\sigma = 0.5$ .....	162
Tabla 6.4.- Valores para los 3 índices para el jacobiano ANALÍTICO, caso dinámico, sin ruido y con ruido añadido de $\sigma = 0.5$ .....	177
Tabla 7.1.- Promedio del número de pasos de establecimiento.....	202
Tabla 8.1.- Resultados con: $t_y = 0$ ; $a_x = 0$ ; $a_z = 0$ ; $\sigma = 0$ .....	213
Tabla 8.2.- Resultados con: $t_y = 30$ ; $a_x = 0$ ; $a_z = 0$ ; $\sigma = 0$ .....	214
Tabla 8.3.- Resultados con: $t_y = 0$ ; $a_x = 5$ ; $a_z = 0$ ; $\sigma = 0$ .....	215
Tabla 8.4.- Resultados con: $t_y = 0$ ; $a_x = 0$ ; $a_z = 5$ ; $\sigma = 0$ .....	215
Tabla 8.5.- Resultados con: $t_y = 5$ ; $a_x = 5$ ; $a_z = 5$ ; $\sigma = 0$ .....	215
Tabla 8.6.- Resultados con: $t_y = 0$ ; $a_x = 0$ ; $a_z = 0$ ; $\sigma = 1$ .....	217
Tabla 8.7.- Resultados con: $t_y = 30$ ; $a_x = 5$ ; $a_z = 5$ ; $\sigma = 1$ .....	217
Tabla 8.8.- Resultados con: $t_y = 20$ ; $a_x = 2.5$ ; $a_z = 2.5$ ; $\sigma = 2.5$ .....	218



# TERMINOLOGÍA MATEMÁTICA UTILIZADA

$\mathbf{R}_{BA}, {}^B\mathbf{R}_A$	Matriz de rotación del sistema A al sistema B.
$\mathbf{t}_{BA}, {}^B\mathbf{t}_A$	Vector de traslación del sistema A al sistema B.
$\mathbf{H}_{BA}, {}^B\mathbf{H}_A$	Matriz de transformación homogénea del sistema A al sistema B.
$\mathbf{R}_{BA}^0, {}^B\mathbf{R}_A^0$	Matriz de rotación del sistema A al sistema B en la posición 0.
$\mathbf{t}_{BA}^0, {}^B\mathbf{t}_A^0$	Vector de traslación del sistema A al sistema B en la posición 0.
$\mathbf{X}_A^0$	Punto tridimensional con referencia en el sistema A en la posición 0.
$\mathbf{s}$	Vector de características de la imagen en sentido general.
$\mathbf{m}, \mathbf{x}, \mathbf{m}_1, \mathbf{x}_1$	Puntos en la primera imagen o imagen izquierda.
$\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{m}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_1$	Puntos en la primera imagen en coordenadas homogéneas.
$\mathbf{m}', \mathbf{x}', \mathbf{m}_2, \mathbf{x}_2$	Puntos en la segunda imagen o imagen derecha.
$\tilde{\mathbf{m}}', \tilde{\mathbf{x}}', \tilde{\mathbf{m}}_2, \tilde{\mathbf{x}}_2$	Puntos en la segunda imagen en coordenadas homogéneas.
$\mathbf{M}, \mathbf{X}$	Puntos en el espacio 3D.
$\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{X}}$	Puntos en el espacio 3D en coordenadas homogéneas.
$SO(3)$	Grupo especial ortogonal $\in R^3$ .
$SE(3)$	Grupo euclídeo especial $\in R^3$ .
$R^3, R^2$	Espacio cartesiano de orden 3, espacio cartesiano de orden 2.
$\mathbf{J}_V$	Matriz de interacción.
$\mathbf{J}$	Jacobiano de la imagen.
$\mathbf{J}_R$	Jacobiano del robot.
$\mathbf{r}$	Vector de posición y orientación en el espacio cartesiano.
$\dot{\mathbf{r}}$	Velocidad espacial (velocity screw).
$\mathbf{G}, \mathbf{H}$	Homografía proyectiva, homografía euclidiana.

$\mathbf{W}_{BA}$ ,  ${}^B\mathbf{W}_A$  Transformación entre velocidades espaciales del sistema A al sistema B.

# CAPITULO 1

## 1 INTRODUCCIÓN

### 1.1 MOTIVACION.

La realización de tareas por parte de los sistemas robotizados en entornos estructurados con presencia de objetos cuya posición y orientación son conocidas, es un problema suficientemente estudiado en la actualidad. Sin embargo, la realización de tareas en entornos donde la configuración del sistema puede variar durante la realización de la misma, presenta numerosas dificultades aún no resueltas suficientemente. Los entornos no estructurados se caracterizan por que la tarea se define en función de la información sensorial presente en el sistema, que puede ser obtenida a través de diferentes tipos de sensores como de posición, velocidad, fuerza, tacto, o visión por citar algunos.

De todos ellos, son los sensores visuales los que presentan mejores prestaciones, pues aparte de aportar flexibilidad al sistema, suministran información geométrica y dinámica del entorno en la cual se mueve el robot, permitiendo conocer tanto los objetos presentes en la escena como su posición, orientación y velocidad con elevada precisión.

La utilización de un sistema de visión en la realización de una tarea por parte de un robot, tiene la denominación genérica de Control Visual (Visual Servoing) [33] [114] [85]. El sistema de visión obtiene información visual de la escena en forma de características de imagen, que son realimentadas al lazo de control del sistema [48].

Las primeras aplicaciones desacoplaban las acciones de extracción de imágenes y el control del robot, de tal manera que el controlador después de recibir la información visual y determinar la posición a moverse, ordenaba al robot realizar un movimiento ciego hasta la posición de destino asumiendo que el entorno permanece estático desde que empezó a moverse. La ventaja de este tipo de control es su simplicidad, pero sólo es

aplicable a tareas demasiado específicas. En contraposición, el control visual tal y como se entiende en la actualidad, permite que el sistema de visión cierre el lazo de control. En cada ciclo de control, la información visual del entorno es actualizada de tal manera que el controlador corrige el movimiento a una nueva posición de destino; esta secuencia se repite hasta que el objetivo de la tarea sea alcanzado.

Diversas publicaciones a lo largo de los años muestran que las técnicas de control visual incrementan la calidad (exactitud, robustez, etc.) del sistema [85][98]. La calidad del control depende del tipo y número de características visuales utilizadas, donde la redundancia de características juega un papel importante [92] siendo esta última una práctica común en control visual. Los cambios en características de la imagen se relacionan con los cambios en articulaciones del robot mediante el denominado Jacobiano de la imagen, cuyo cálculo juega un papel fundamental en las prestaciones del control visual.

Otro importante aspecto tratado es el número de cámaras utilizadas. Muchos autores han presentado propuestas con una sola cámara, [6] [23] [47] [96] [94] [95]. Sin embargo una sola cámara tiene sus propias limitaciones como la necesidad de información adicional para determinar la profundidad del objeto, o la facilidad de caer en singularidades y mínimos locales [102] al no existir procedimientos sistemáticos de evitarlos [92]. Los sistemas de control visual con dos cámaras [64] [77] [103] [162] o más cámaras [107] [118] [122] [165] ayudan a superar estos inconvenientes gracias a la información visual redundante del sistema [65] [102] [122] [125] donde la información de profundidad está implícitamente considerada, y en la mayoría de casos es recuperada.

Maru et al. [125] fue uno de los primeros autores en realizar control visual en un sistema de dos cámaras, gracias a un par de cámaras paralelas calcula el jacobiano de la imagen en línea para realizar el control. En [8] se utilizan dos cámaras no paralelas para estimar el jacobiano de la imagen, se realiza el seguimiento de un objeto con movimiento desconocido. En [58] se presenta un sistema de dos cámaras robusto a errores de calibración con una aplicación de posicionamiento. En [63] se presenta una aplicación con cámaras fijas. En [102] se demuestra que el uso de la geometría epipolar en el control del sistema, incrementa la robustez y suavidad de movimiento. En [124] se comparan tres formas de apilar el jacobiano de cada imagen para conseguir un solo jacobiano que represente al sistema.

La mayoría de los sistemas de dos o varias cámaras realimentan información procedente de una reconstrucción tridimensional, por lo que le hace dependiente de los errores propios de la reconstrucción y de la calibración [3] aunque también se han presentado trabajos con sistemas de dos cámaras que evitan la reconstrucción tridimensional [61] [62].

En un sistema de dos cámaras, la información visual de una y otra cámara está relacionada por la geometría epipolar del sistema formado [50][69]. Esta restricción añade robustez al sistema a la presencia de ruido como se comprobó en [102], donde se considera la geometría epipolar en la ley de control.

En la presente tesis se toma en consideración las propiedades de la geometría epipolar para la estimación del jacobiano de la imagen así como la definición de un factor de

## *Introducción.*

fiabilidad que toma en cuenta el tamaño de los movimientos realizados en el espacio de características y además la similitud de los movimientos actuales con los deseados en el espacio de las articulaciones. Los experimentos realizados verifican que al utilizar estas dos consideraciones, se incrementa la robustez del sistema frente al ruido. Se espera que en un futuro cercano los aportes de la presente tesis puedan ser extendidos a un número mayor de vistas.

Un aspecto diferenciador del presente trabajo es que se ha optado por estimar el jacobiano de la imagen, frente a otras tendencias más empleadas que suponen un cálculo analítico del mismo, muy sujeto a los errores propios de la calibración de la cámara y del robot.

Se ha optado por el estudio de un sistema con cámaras no calibradas pues de este modo se incrementa la flexibilidad del sistema en entornos no estructurados, ya que en este tipo de entornos, tanto las características, la óptica y la geometría de las cámaras pueden cambiar dinámicamente de acuerdo a la escena o al movimiento de la cámara. Además no se necesita ninguna información ni del objeto ni de la escena, por lo que se hace muy adecuado en entornos desconocidos o cambiantes.

El uso de los centros de gravedad de puntos en la imagen como características visuales es una práctica muy generalizada en control visual, debido a la robustez en su detección y a la simplicidad de los algoritmos que se derivan de ellos, lo que facilita su implementación. Ha habido muchos trabajos donde se utilizan otro tipo de características visuales para realizar control visual como líneas, segmentos de rectas, elipses, momentos, etc. En la presente tesis también se ha considerado el control visual a partir de líneas, analizando en una primera parte la orientación de las líneas en el espacio de trabajo vista desde dos cámaras. En una segunda parte se analiza las características de las líneas que son medidas directamente en el plano de la imagen.

La mayoría de aplicaciones de control visual se realizan en robot manipuladores. Existe también un área de investigación que aplica control visual a robots móviles, donde se incorporan las restricciones propias de este tipo de sistema. En la presente tesis se han aplicado transformaciones 2D a 2D para determinar la orientación y posición relativa entre un robot móvil y su objeto de control, y su aplicación a funciones de seguimiento visual. Los resultados obtenidos han sido satisfactoriamente contrastados con los obtenidos mediante otros métodos.

## **1.2 ENCUADRE DEL PROBLEMA Y CONTRIBUCIONES.**

El control visual está asociado a la determinación del jacobiano de la imagen, el cual relaciona cambios en características de la imagen con cambios en las articulaciones del robot o velocidades del punto en el espacio de trabajo con respecto a la cámara. Si se considera la primera relación, es llamado jacobiano visual-motor [42][174], si se trata de la segunda, se denomina matriz de interacción [47].

La matriz de interacción es la forma analítica del jacobiano de la imagen y depende del tipo de características de la imagen a detectar (puntos, líneas, círculos, etc.). Si las

características visuales son puntos en la imagen, depende de los parámetros de la calibración de la cámara, y de la profundidad de la posición del punto en la escena. En este cálculo se asume un modelo perfecto de la cámara y una exacta determinación de los anteriores parámetros. Cualquier error en el modelo de la cámara, en la transformación referencia-cámara, puede derivar en fallos en el control o que el sistema alcance singularidades. Otro problema es la determinación de la profundidad  $Z$ ; la solución más empleada es considerarla constante en toda la etapa de control e igual a la coordenada  $Z$  de la posición deseada [21] [79] [94], pero esto conlleva a diversas desventajas. La coordenada  $Z$  también puede determinarse en línea y obtenerse en cada iteración con ayuda de información métrica del objeto de control [7], información de un dispositivo de luz estructurada [6] [93], por triangulación con una segunda cámara [68], con un sistema estéreo basado en cámara monocular activa [72], aplicando el concepto de disparidad [177] [125], o en forma escalada a través de la descomposición de una homografía [39] [117].

A diferencia de jacobiano analítico, el jacobiano estimado depende solamente de cambios en las articulaciones del robot, y de cambios en características de la imagen. Se obtiene pues un jacobiano que no depende de los errores de calibración de la cámara, ni la determinación de  $Z$ . Este jacobiano puede obtenerse ya sea por métodos iterativos [42][143], a través de un número adecuado de movimientos linealmente independientes [174], o por técnicas de aprendizaje, ya sea por redes neuronales [97] o modelos fuzzy [164].

En la presente tesis se proponen nuevos algoritmos para estimar el jacobiano de la imagen que usan el método de los últimos movimientos realizados. A este método se le ha añadido la definición de un factor de fiabilidad y la incorporación de la información de la geometría epipolar [140] [162] a través de la matriz fundamental. Aunque es intuitivo pensar que el aumento del número de cámaras en el sistema, incrementa la calidad del control en términos de precisión, robustez y suavidad de movimiento, además evita singularidades y la necesidad de una rigurosa calibración de las cámaras, como se mostró en [102] y en [165]. En la presente tesis se demuestra experimentalmente que este incremento se ve reforzado en lo que a robustez frente al ruido se refiere con la adición de información de la geometría epipolar en la estimación del jacobiano de la imagen, algo totalmente original en la literatura.

El uso de dos cámaras frente a una cámara para el desarrollo de algoritmos en sistemas con cámaras no calibradas, se justifica sobradamente por el incremento en la estabilidad, exactitud y tolerancia a fallos del sistema [162] [103] al considerar mayor información en la estimación del jacobiano de la imagen y por consiguiente en el cálculo de la ley de control, frente a los costes de equipos y tiempos de procesamiento. En sistemas con cámaras calibradas las ventajas son mayores aún, pues en el cálculo del jacobiano en sistemas de una sola cámara participa la variable de profundidad que hace imposible calcular el jacobiano solamente con la información de la imagen por lo que la profundidad debe determinarse con información extra o asumirla constante en todo el proceso de control.

*Introducción.*

### **1.3 ESQUEMA GENERAL DE LA TESIS.**

Tras la introducción del presente capítulo, en el capítulo dos se presenta el estado del arte del control visual en general para posteriormente describir el estado del arte de la estimación del jacobiano de la imagen.

En el capítulo tres se describen los modelos matemáticos de los sistemas de una y dos cámaras, así como el modelo cinemático del sistema articular utilizado. Se describen también los métodos de calibración utilizados tanto para una sola cámara como para el par estéreo. Así también el método de reconstrucción tridimensional utilizado. Se presenta el equipo de experimentación, los patrones utilizados para la detección de características. En la parte experimental se incluyen pruebas con diferentes métodos de determinación de la matriz fundamental, también, pruebas de recuperación de la traslación y rotación a partir tanto de homografías como de la matriz esencial. La última prueba presentada es la determinación de la separación entre ejes de rotación del segundo y tercer eslabón del sistema articular mediante técnicas de visión. Este capítulo se complementa con los anexos A y B.

El capítulo cuatro se dedica a la estimación del jacobiano de la imagen. Se parte de las expresiones matemáticas de los algoritmos ya existentes en la literatura para presentar a continuación los nuevos algoritmos propuestos. También se presenta una comparativa de los valores singulares de la expresión  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  para cada uno de los algoritmos propuestos. Este capítulo se complementa con los anexos C y D.

El capítulo cinco, se describen las estrategias de control realizadas tanto en el caso estático (tareas de posicionamiento) como en el caso dinámico (tareas de seguimiento). Se presentan los resultados tanto en tablas como en gráficas para los índices de evaluación definidos, y se dan las conclusiones respectivas.

En el capítulo seis se dedica a la determinación del jacobiano analítico. Se presentan gráficas de los índices de comparación entre el jacobiano analítico y algunos métodos de estimación del jacobiano también tanto para el caso estático como dinámico.

En el capítulo siete se describe la implementación de dos métodos para estimar el jacobiano basado en líneas, el control visual se aplica para realizar una tarea de alineamiento. A fin de comparar resultados, se implementa también el jacobiano analítico para líneas propuesto en la literatura, aunque esta vez se aplica en forma conjunta el jacobiano analítico para ambas cámaras.

En el capítulo ocho, se presenta una aplicación del control visual a robots móviles, donde la información de la posición y orientación del objetivo se encuentra en base a transformaciones proyectivas. Este capítulo se complementa con el anexo E.

En el capítulo nueve se presentan las conclusiones generales de la tesis así como los trabajos futuros.

Al final se presentan los anexos A, B, C, D, E y la bibliografía.

## 1.4 PUBLICACIONES.

Se han realizado publicaciones relacionadas con el tema central de la tesis, así como de otras publicaciones de control visual realizadas conjuntamente en el grupo de investigación de visión por computador de la Universidad Politécnica de Madrid.

### 1.4.1 PUBLICACIONES REFERENCIADAS EN EL ISI.

- L. Pari, J.M. Sebastián, C. González, L. Ángel. *Image Based Visual Servoing: A New Method for the Estimation of the Image Jacobian in Dynamic Environments*. Lecture Notes in Computer Science (ISSN: 0302-9743). Image Analysis and Recognition (ISBN-10: 3-540-44891-8, ISBN-13: 978-3-540-44891-4), Editorial Springer-Verlag, Vol. 4142/2006, pp. 850-861, Septiembre, 2006.
- J.M. Sebastián, L. Pari, C. González, L. Ángel. *A New Method for the Estimation of the Image Jacobian for the Control of an Uncalibrated Joint System*. Lecture Notes in Computer Science (ISSN: 0302-9743). Pattern Recognition and Image Analysis (ISBN: 3-540-26153-2), Editorial Springer-Verlag, Vol. 3522/2005, pp. 631-638, Junio 2005.

### 1.4.2 CONTRIBUCIONES A CONGRESOS INTERNACIONALES.

- C. Soria, L. Pari, R. Carelli, and J.M. Sebastián. *Homography-Based Tracking Control for Mobile Robot*. Proceedings of the IEEE International Symposium on Intelligent Signal Processing. Alcalá de Henares, Spain, October 3-5, 2007.
- L. Angel, A. Traslosheros, J.M. Sebastián, L. Pari, R. Carelli, F. Roberti. *Vision-Based Control of the Robo Tennis System*. Proceedings of the International Conference on Advanced Robotics, ICAR 2007, Seoul, Korea, August 22-25, 2007.
- L. Pari, J.M. Sebastián, C. González, L. Ángel. *Estimation of the Image Jacobian Using two Weakly Calibrated Cameras*. Proceedings del IEEE European Conference on Control 2007, Kos, Greece, July 2-5, 2007.
- L. Pari, C. González, J.M. Sebastián, L. Ángel. *Control de un Sistema Articular Mediante la Estimación del Jacobiano de la Imagen con dos Cámaras Débilmente Calibradas*. Proceedings del V Congreso Internacional de Investigación en Ingeniería Eléctrica y Electrónica 2006. Aguascalientes, México. 6-9 Noviembre, 2006.
- L. Pari, J.M. Sebastián, C. González, L. Ángel. *Image Based Visual Servoing: A New Method for the Estimation of the Image Jacobian in Dynamic Environments*. Proceedings del Third International Conference on Image Analysis and recognition ICIAR 2006, Póvoa de Varzim, Portugal, September 18-20, 2006.

*Introducción.*

- J.M. Sebastián, L. Pari, C. González, L. Ángel. *A new method for the estimation of the Image Jacobian for the control of an uncalibrated joint system*. Proceedings del 2<sup>nd</sup> Iberian Conference on Pattern Recognition and Image Analysis. Estoril, Portugal, June 7-9, 2005.

**1.4.3 CONTRIBUCIONES A CONGRESOS NACIONALES.**

- L. Pari, J.M. Sebastián, Traslosheros A., y L. Angel. *Control Visual Basado en Líneas Utilizando un Sistema de Visión de Dos Cámaras*. Proceedings de XII Reunión de Trabajo en Procesamiento de Información y Control. Rio Gallegos, Argentina, 16-18 de Octubre del 2007.
- L. Pari, C. González, J.M. Sebastián, y L. Ángel, V. Mut. *Estimación del Jacobiano de la Imagen Empleando Cámaras Débilmente Calibradas*. Proceedings de IV Jornadas Argentinas de Robótica. Córdoba, Argentina, 16-17 Noviembre, 2006.
- L. Pari, L. Ángel, F. Sánchez, F. Roberti, J.M. Sebastián y R. Carelli. *Seguimiento de Objetos a Alta velocidad Mediante un Robot Paralelo*. Proceedings de IV Jornadas Argentinas de Robótica. Córdoba, Argentina, 16-17 Noviembre, 2006.
- L. Pari, C. González, J.M. Sebastián, L. Ángel, V. Mut. *Control Visual Basado en Imagen: Un Nuevo Método para estimar el Jacobiano de la Imagen en Entornos Dinámicos*. Proceedings de XXVII Jornadas de Automática CEA-IFAC. ISBN-84-689-9417-0, Almería, 6-9 Septiembre, 2006.
- F. Sánchez, L. Ángel, L. Pari, J.M. Sebastián y R. Carelli. *Control Visual del Robot Paralelo Robotenis*. Proceedings de XXVII Jornadas de Automática CEA-IFAC. ISBN-84-689-9417-0, Almería, 6-9 Septiembre, 2006.
- L. Pari, C. González, L. Ángel, J.M. Sebastián. *Un nuevo método para la estimación del Jacobiano de la imagen utilizando la matriz fundamental*. Proceedings de XXVI Jornadas de Automática CEA-IFAC, ISBN: 84-689-0730-8, Alicante, 7-10 de Septiembre, 2005.
- D. Gutiérrez, L. Ángel, L. Pari, J.M. Sebastián. *Estimación de la posición y de la velocidad de un objeto móvil. Aplicación al sistema Robotenis*. Proceedings de XXVI Jornadas de Automática CEA-IFAC, ISBN: 84-689-0730-8, Alicante, 7-10 Septiembre, 2005.



# CAPITULO 2

## 2 ESTADO DEL ARTE

### 2.1 ESTADO DEL ARTE DEL CONTROL VISUAL.

El término “Control Visual”, se introdujo en el artículo de Hill y Park [76] en 1979 para reemplazar al término “Realimentación Visual” que era de uso mas generalizado. En el artículo de Sanderson y Weiss en 1980 [161] se introduce la primera taxonomía del control visual, y en sus publicaciones de los años de 1985 y 1987 [185] [186], consolida la diferencia entre los dos principales y grandes esquemas del control visual [85] como son el control visual basado en imagen (IBVS) y el control visual basado en posición (PBVS).

Los primeros sistemas de control de robots basados en visión se reportaron en los inicios de la década de los 70 [168], en la década de los 80 los avances de Control Visual fueron muy lentos, pero a inicios de los 90 y en la presente década este avance se incrementó enormemente cumpliendo con los requisitos de tiempo real que exigian las aplicaciones superando los problemas de retardo y la comunicación entre procesos. Las principales razones de este adelanto fueron:

- La potencia de cálculo y bajo coste de las unidades de cálculo.
- La disponibilidad de sensores ópticos de elevadas prestaciones.
- La integración de algoritmos en librerías de fácil uso e instrumentos de software plenamente integrados.
- El desarrollo de nuevos algoritmos tanto en área de visión por computadora como en el campo de la robótica.

Existen varios surveys en control visual que describen la taxonomía y los avances en esta área de investigación, así como sus aplicaciones, como los de Corke [33] y Hutchinso et al. [96] que han sido una referencia por varios años. En el survey de D.

Kragic [98], se sugiere una clasificación del control visual desde el punto de vista de la estimación del modelo visual-motor del sistema. En el de Malis [114], se propone una clasificación en función desconocimiento del modelo 3D del objeto. En el survey de Hashimoto [70], se presentan también los últimos avances realizados en los diferentes tópicos del control visual. Recientemente, en el tutorial de Chaumette y Hutchinson [25] se describen los dos principales esquemas de control visual, se analizan los potenciales problemas y se presenta el análisis de estabilidad para los dos principales esquemas de control. En la segunda parte [26] se describen los esquemas de control avanzados, el uso de la geometría epipolar, el jacobiano visual-motor, y la estimación directa de la matriz de interacción. Así también, existen interesantes surveys tanto en la tesis de N. García [57] como en la de J. Pomares [150].

A continuación se describe el estado del arte del control visual empezando con los conceptos de las diversas configuraciones cámara robot y continuar con la clasificación de los esquemas de control desde diferentes puntos de vista.

### 2.1.1 CONFIGURACIONES CÁMARA-ROBOT.

Esta configuración está dividida según dos criterios: la posición de la cámara con respecto al robot y según el número de cámaras.

#### 2.1.1.1 SEGÚN LA MANERA EN QUE ESTÁ DISPUESTA LA CÁMARA RESPECTO AL ROBOT.

Si la(s) cámara(s) está(n) montada(s) en el mismo robot o en algún lugar fijo observando la escena:

- **Cámara en mano**, aquí la cámara está montada en el brazo del robot y se mueve solidaria al movimiento del mismo. En esta configuración existe una relación constante entre el sistema de coordenadas de la cámara y el sistema del efector final del robot. Algunas aplicaciones requieren más de una cámara como en [102]. Una característica de esta configuración es que se pueden obtener imágenes de regiones particulares de la escena, es decir imágenes de carácter parcial [54] donde la resolución efectiva de la escena es incrementada.
- **Cámara fija**, esta segunda configuración tiene la cámara fija (o varias cámaras [1] [79] [83] [162]) en algún punto del espacio de trabajo de tal manera que observa la escena. Aquí la relación entre el sistema de coordenadas de la cámara y el sistema de coordenadas de la base del robot o de la referencia, es constante, de tal manera que la posición de la cámara es independiente del movimiento del brazo del robot. Al contrario de la configuración cámara en mano, en esta configuración la vista de la escena es menos precisa pero de carácter global es decir se pueden obtener imágenes de toda la escena [54]. En esta configuración se puede tener una vista tanto del robot como del objeto de control, sin dejar de mencionar el uso de una cámara fija motorizada (pan, til, zoom).
- **Híbrido**, es una combinación de las anteriores configuraciones donde se aprovecha la información de la imagen local que da la configuración cámara en mano y la información de la imagen global de la cámara en configuración cámara fija. En

algunos ejemplos como en [53], o en [54] se realizan dos tareas: una de posicionamiento y otra de seguimiento; en [120] se implementa un sistema que maneja oclusiones y evita obstáculos en base a la planificación de la trayectoria en la imagen; en [134] se implementa un sistema donde la cámara fija es sostenida por otro robot.

### **2.1.1.2 SEGÚN EL NÚMERO DE CÁMARAS.**

- **Sistema de cámara única**, la utilización de una sola cámara en el sistema minimiza el procesamiento visual requerido, pero la pérdida de información de profundidad complica el diseño del control así como también limita los tipos de posicionamiento que pueden ser implementados. El parámetro de profundidad puede ser estimado con anterioridad [53], adaptativamente [139], o a través de alguna información métrica del objeto a controlar [7]. La configuración cámara en mano es la más utilizada, dada su sencillez y su bajo costo de implementación [47] [53] [139].
- **Sistema de dos cámaras**, conocida también como sistema estéreo, se tienen dos vistas simultáneas de la escena [1] [77] [82] [103] [125]. Tiene la ventaja de obtenerse percepción tridimensional, además se puede utilizarse las propiedades de la geometría epipolar [9] [102] [162].
- **Sistema de cámaras redundantes**, en esta configuración se aprovecha la ventaja de tener redundancia de características visuales que añade robustez al sistema, aunque se incrementa el tiempo de procesamiento; una aplicación se presenta en [98] donde a un sistema de cámara estéreo de dos cámaras fijas se añade una tercera que, desde la parte superior observa la escena; otra aplicación con tres cámaras se tiene en [122] donde se ve su eficacia frente a oclusiones parciales en una tarea de seguimiento.

### **2.1.2 ESQUEMAS DE CONTROL VISUAL.**

Se tienen varios enfoques, según: el control de las articulaciones del robot, la función del error, la observación de las características en la cámara, los parámetros de la cámara, el modelo 3D del objeto.

#### **2.1.2.1 EN FUNCIÓN DE LA ESTRUCTURA DE CONTROL.**

- **Control visual directo**, en este esquema de control, el controlador convierte directamente la información visual en torques que alimentan las articulaciones del robot. Al ser el ciclo de control muy rápido, (inferior a 10 ms.) el sistema es muy propenso a la generación de vibraciones. Un ejemplo se tiene en [94].

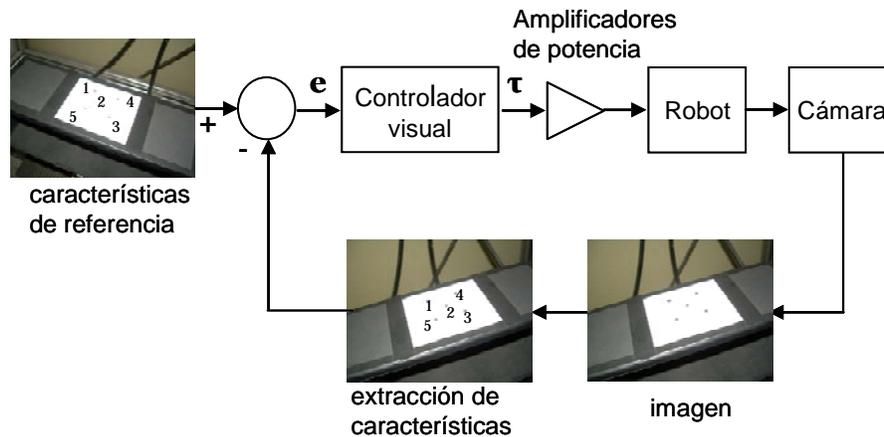


Figura 2. 1.-Control visual directo.

- **Mirar y mover estático**, En este esquema de control la extracción de información visual y el control del robot son dos tareas separadas, donde luego de extraerse y procesarse las características de la imagen sigue la tarea de control del robot. El robot entonces ejecuta el movimiento asumiendo que el ambiente permanece estático después de que empieza a moverse, Al no existir realimentación visual dinámica, este esquema de control no pertenece al control visual.
- **Mirar y mover dinámico**, en este esquema de control, el resultado de la realimentación visual alimenta al controlador interno del robot que se encargará de posicionar el robot. El controlador del robot trabaja a bajo nivel por lo que su ciclo de control (menor que 10 ms.) deberá ser mayor que el del controlador visual (menor que 40 ó 50 ms.). Tanto el controlador del robot como el controlador visual están desacoplados por lo que simplifica mucho el diseño del control, aliviando de este modo al controlador visual de tener que afrontar las no linealidades y la dinámica del robot. Muchos robots poseen su propio controlador que aceptan coordenadas cartesianas o posiciones incrementales, los motivos expuestos y además la relativa baja velocidad del controlador visual hacen que casi todos los sistemas implementados en la actualidad utilizan esta estrategia [64] [85]. La mayoría de sistemas implementados son del tipo mirar y mover dinámico. Pocos sistemas intentan integrar los lazos de realimentación visual y del robot como en [187] que presenta un sistema donde el manipulador se mueve a través de una superficie plana y es vista por una cámara ubicada en la parte superior, posicionando el objeto a controlar durante la fase de planificación. Un punto en el efector final es marcado por una luz que le permite ser seguido a una frecuencia de 50Hz para obtener una realimentación basada en posición durante la fase de ejecución; experimentalmente se muestra que la integración de la realimentación visual dentro del controlador permite una operación eficiente y de convergencia rápida a pesar de significativos errores en la calibración de la cámara o del modelo cinemático.

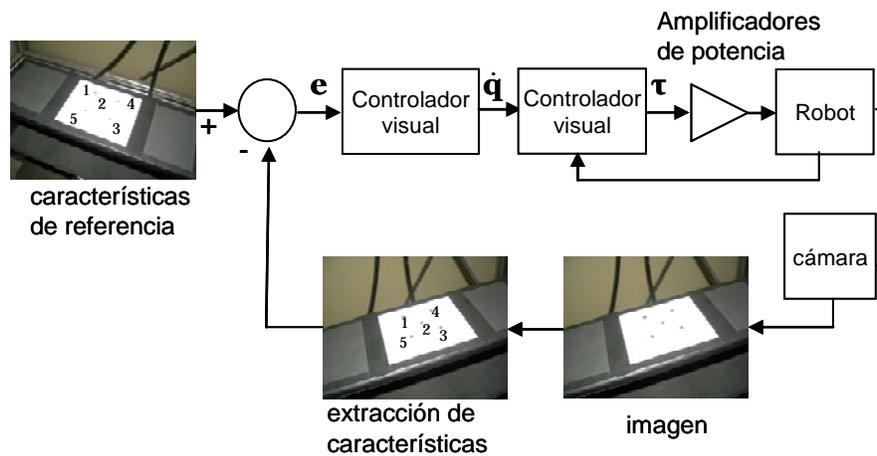


Figura 2.2.- Control visual mirar y mover dinámico.

### 2.1.2.2 EN FUNCIÓN DE LA DEFINICIÓN DEL ERROR.

- **Control visual basado en posición**, también llamado control visual 3D (PBVS Position Based Visual Servoing), las características visuales de la imagen son utilizadas para calcular la posición y orientación del objeto de control en el espacio cartesiano, donde interviene el modelo geométrico del objeto, el modelo de la cámara (la calibración de la cámara) y la relación geométrica cámara robot, que lo resulta muy dependiente de la exactitud de ellos, además de ser muy sensitivo a perturbaciones [21]. La función de error (función de error cinemático [98]), que es la diferencia entre la posición y orientación actual del objeto y su posición y orientación deseada, es definida en un espacio cartesiano 3D [189] [85], por lo que la trayectoria del objeto se controla directamente en un espacio tridimensional [117], lo que permite una programación más natural e intuitiva. En este esquema de control se asume que los modelos considerados son perfectos, caso contrario el control se deteriora, y puesto que no se tiene un control directo del objeto en el plano de la imagen, éste puede salir del campo visual de la cámara durante el proceso de control. Utilizando un esquema ECL puede superarse este problema [64] [98] pues se estaría observando simultáneamente las características visuales del objeto y del robot.

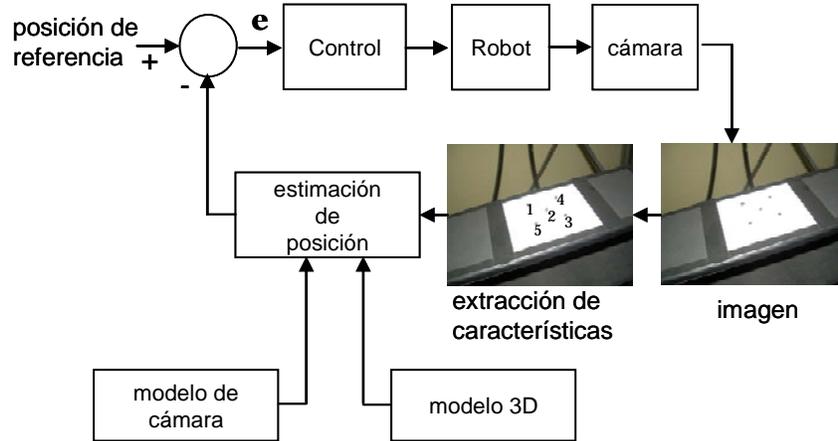


Figura 2.3.- Control visual basado en posición.

Puesto que las inexactitudes en la estimación de la posición y orientación del objeto no pueden ser calculadas analíticamente como función de los errores de calibración y de las perturbaciones de las medidas, es imposible demostrar analíticamente la estabilidad del sistema en presencia de errores de los modelos [21]. En [25] se demuestra la estabilidad asintótica global para dos expresiones particulares del jacobiano de la imagen bajo este esquema de control con la suposición de un conocimiento perfecto de los modelos. Dado las condiciones para la reconstrucción tridimensional, el PBVS es fácilmente implementado en sistemas estéreo de dos cámaras como en [133] donde se implementa un sistema de visión de alta velocidad, o más cámaras como en [106] donde se usan tres cámaras fijas, y se usa el filtro de Kalman extendido para estimar la posición y orientación del objeto. En [1] se usan dos cámaras con aplicaciones de flujo óptico y el filtro  $\alpha, \beta, \gamma$ . Aplicaciones con una sola cámara se puede ver en [131] donde se aplica el filtro de Kalman para predecir el movimiento del objeto, en [188] y [189] se usa el filtro de Kalman extendido. En [123] se aplica un controlador que desacopla la rotación de la traslación con una realimentación no lineal del estado. En [176] además se mantiene el objeto de control en el campo visual de la cámara. Tonko y Nagel [180] trabajan con formas complejas (objetos no poliédricos) que disponen de su modelo CAD, para realizar seguimiento en una configuración de dos cámaras y tareas de desensamblaje de partes de automóvil.

- **Control visual basado en Imagen**, o control visual basado en características, (IBVS Imagen Based Visual Servoing [85]), o control visual 2D. En esta estrategia de control la función de error y la ley de control son definidos directamente en el plano 2D de la imagen [98] y no es necesario el conocimiento del modelo 3D del objeto, haciéndola muy robusta a los errores de los modelos, además de reducirse el tiempo del ciclo de control. En [46] se comprueba experimentalmente que este esquema de control es robusto a errores tanto de la calibración de la cámara como de la posición del objeto. El control visual puede realizarse estimando [88] [82] el jacobiano de la imagen o calculándolo analíticamente [47]. Si se opta por el cálculo analítico, deberá contarse con las cámaras calibradas, la relación geométrica cámara-robot, y la profundidad (la coordenada Z) a la que se encuentra la característica

considerada en el espacio 3D. Por el contrario, si se opta por una estimación en línea, ya no será necesario conocer ninguno de estos parámetros, por lo que será robusto a los errores tanto de la calibración de la cámara como de la calibración del robot [85] [186].

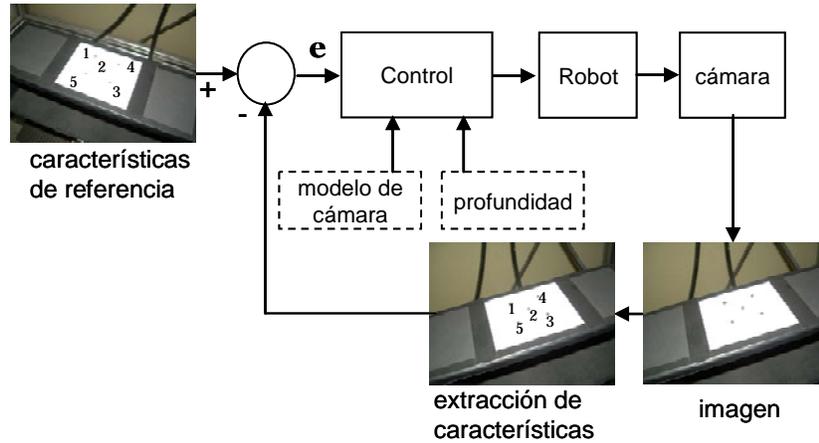


Figura 2.4.- Control visual basado en imagen.

Para la estrategia de control se puede elegir entre calcular (o estimar) el jacobiano de la imagen en cada posición actual del objeto de tal manera que se tiene un jacobiano actualizado para cada posición [162] o calcular solamente el jacobiano que pertenece a la posición deseada y utilizarlo en forma constante para todas las posiciones intermedias [47], o realizar un promedio de ambos jacobianos (el de la posición actual y el de la posición deseada) [115]. La principal desventaja de la segunda de ellas es que sólo es estable en los alrededores de la posición deseada, lo que significa que no se asegura la convergencia cuando la distancia entre la posición de inicial y la deseada es muy grande [21] limitándose de este modo el espacio de trabajo. Debido a las no linealidades y singularidades potenciales en la relación existente entre el espacio de la imagen y el espacio de trabajo, principalmente cuando la configuraciones inicial y deseada son distantes, la cámara (o el robot) puede realizar movimientos complicados, nada óptimos y en algunas ocasiones movimientos no realizables físicamente [21], pues el control se realiza en el plano de la imagen y el movimiento en 3D es impredecible. Un esquema de control IBVS puede tener a lo mucho estabilidad asintótica local como se demostró en en [25]. Un caso muy particular es la comprobación realizada por Kelly [96] que usando el método directo de Lyapunov comprueba la estabilidad asintótica local del sistema sin considerar los errores de calibración de la cámara ni los errores del modelo del objeto. El mismo resultado obtiene Deng [41] incluyendo la robustez del sistema, ampliando este análisis al esquema PBVS aunque no se precisa los límites de estabilidad con respecto a estos errores. En [11] se presenta un control visual 2D basado en homografías, en el que no se necesita ninguna medida de la estructura 3D del objeto observado, y utiliza el principio de isomorfismo de la posición y orientación de la cámara; además se prueba teóricamente la estabilidad local de la ley de control propuesta. En [87] se realiza control visual basado en imagen utilizando coordenadas cilíndricas de los puntos en la imagen. En [158] se formula

proyectivamente el modelo cinemático directo del robot en un sistema estéreo con cámaras no calibradas, se calcula desde el punto de vista proyectivo tanto el jacobiano de la imagen como la ley de control.

- **Control visual híbrido**, en este esquema de control se aprovecha las ventajas de los métodos basados en imagen y de los basados en posición, seleccionando adecuadamente las características visuales. Algunas pueden definirse en un esquema de control 2D mientras que otras derivan en esquema 3D. En este esquema de control se desacoplan las componentes de la traslación y las de rotación. La ley de control está en función de las características de la imagen y de algunos parámetros de la posición y la orientación del objeto (o de la cámara). El esquema más representativo es el **control visual 2½** con el cual se consigue una estabilidad asintótica global en presencia de posibles errores de calibración, y no es necesario el conocimiento del modelo 3D CAD del objeto [117]. Su principal desventaja radica en ser relativamente sensible a las perturbaciones de la medición [127] y ser muy sensitivo al ruido presente en la imagen [22].

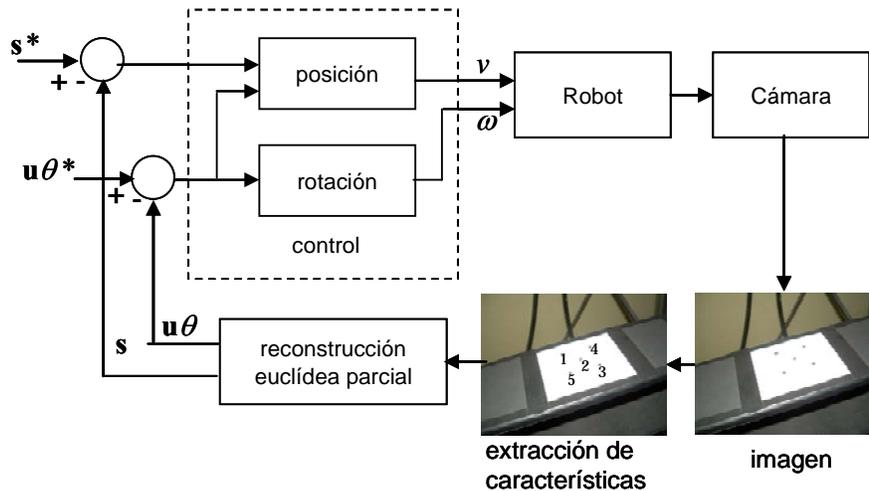


Figura 2.5.- Control visual 2½D.

Existen diferentes propuestas en la literatura. En [117] la información 3D obtenida a partir de una reconstrucción proyectiva es utilizada para regular el error de rotación mientras que la información en el plano 2D de la imagen es utilizada para regular el error en traslación; se hace un análisis de estabilidad y se dan algunas condiciones analíticas que aseguran la estabilidad global del sistema aún en presencia de errores de calibración. En [22] además de analizar los posibles problemas del control visual basado en imagen como son las singularidades y los mínimos locales, se presenta dos leyes de control para control visual 2½, y se comenta brevemente las condiciones para obtener una estabilidad global del sistema. En [48] se presenta un controlador adaptivo para un esquema de control 2½, y se comprueba su estabilidad mediante Lyapunov. En [23] también se utiliza la reconstrucción proyectiva para realizar control 2½D pero aplicado a objetos planos para un sistema monocular cámara en mano. En [39] se implementa un nuevo controlador y se le compara con otro basado en la descomposición a partir de

la geometría epipolar. En [59] se presenta una ley de control híbrida que permite desacoplar el movimiento rotacional del traslacional, a partir de la descomposición de una homografía estimada a partir de líneas polares de cámaras catadióptricas. En [116] se extiende el mismo concepto pero aplicado a imágenes de contornos planos con formas complejas.

Hay otras propuestas de control híbrido como la de Hutchinson [86], que propone un esquema de control dinámico (2D & 3D switched dynamic) que según el comportamiento del sistema, se intercambia entre control 2D y 3D, por unas reglas de tipo determinístico y probabilística. Los resultados presentados son a nivel de simulación. En [136] se sintetiza una ley de control que explota los atributos dinámicos y cinemáticos de cada grado de libertad. En [175] se presenta un sistema de control desacoplado (entre movimientos traslacionales y rotacionales) utilizando momentos de la imagen. En [60] se presenta una propuesta llamada Control Visual 5D donde se minimiza la suma de los errores tanto en 2D como en 3D multiplicados cada uno por un factor de peso que indicará la magnitud de influencia de cada tipo de error. Los resultados de simulación indican una mejora en el espacio cartesiano frente al control visual  $2\frac{1}{2}$ .

- **Control visual particionado**, propuesto por Corke y Hutchinson [35] [26], es una variación del control basado en imagen en donde se desacopla el movimiento traslacional y rotacional sobre el eje óptico de la cámara (eje  $Z$ ) del movimiento en los otros dos ejes (ejes  $X$  e  $Y$ ). La matriz de interacción se divide en dos matrices, la primera de ellas se forma con la primera, segunda, cuarta y quinta columna de la matriz de interacción por lo que depende de los ejes  $X$  e  $Y$ , mientras que la segunda matriz es formada con la tercera y sexta columna, y depende solamente del eje  $Z$ . Esta última matriz es dependiente de dos nuevas características visuales fácilmente determinadas a partir de las originales. En las pruebas realizadas se observa que con este esquema se evitan los movimientos complicados en el espacio 3D para conseguir la permanencia de las características visuales en el plano de la imagen.
- **Control visual basado en movimiento**, en esta estrategia lo que se mide es el llamado flujo óptico que es una medida del movimiento de un objeto en la imagen [135], [139]. Hay varios artículos que usan esta estrategia; en [36] se controla un sistema cámara en mano para posicionar el plano de la imagen paralelo al plano del objeto; una tarea con seguimiento de contornos se encuentra en [30]. En [139] se utiliza flujo óptico para realizar una tarea de seguimiento con una sola cámara utilizando tres diferentes leyes de control. En [58] se usa el concepto de disparidad y mediciones de flujo óptico en un sistema estéreo para implementar un sistema robusto a los errores de calibración.

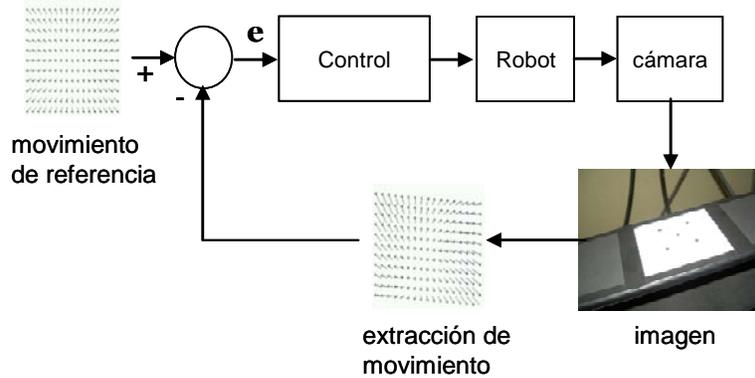


Figura 2.6.- Control visual basado en movimiento.

### 2.1.2.3 EN FUNCIÓN DEL CAMPO VISUAL.

- **Terminal en lazo abierto** (esquema de control EOL [85]), en esta configuración se observa solamente el objeto a controlar. En un sistema cámara en mano si se tiene la tarea de posicionar el robot con respecto a un objeto, esta tarea se lleva a cabo en forma indirecta a través del conocimiento de la relación cinemática entre la cámara y el robot, cuyos errores pueden llevar a errores de posicionamiento ya que no pueden ser observados por el sistema; si se observase también el robot se podría corregir estos errores. En general no se puede garantizar la exactitud del posicionamiento del sistema a menos que ambos, el objeto y el robot sean observados.
- **Terminal en lazo cerrado** (ECL); en este esquema de control tanto el efector final y e objeto de control son observados, por lo que, tanto los errores de posicionamiento del objeto de control y del efector final se corrigen al mismo tiempo. Parece pues conveniente usar una configuración ECL, pero aparte de utilizarse una configuración cámara fija, se requeriría mayores recursos de computación. En [187] utiliza un sistema cámara fija monocular para una tarea de posicionamiento de planos con buenos resultados aun en presencia de errores del modelo cinemático y errores de calibración del sistema de visión. En [64] se usa ECL para diversas tareas de alineamiento.

### 2.1.2.4 EN FUNCIÓN DEL MODELO 3D DEL OBJETO.

Propuesta por Malis [114], esta clasificación se basa en el conocimiento a priori del modelo 3D del objeto de control, en esta estrategia se tienen dos subdivisiones:

- **Control visual basado en el modelo**, se denomina así cuando se conoce el modelo 3D del objeto de control, que junto con el conocimiento muy exacto de la calibración de la cámara y del robot permite estimar la posición y la orientación actual del objeto. Para el caso particular de que las características visuales a

reconocer sean puntos en la imagen, se necesitan al menos 4 puntos para realizar una estimación exacta de la posición y orientación del objeto [40]; si mas de cuatro puntos son disponibles, se puede prescindir de los parámetros de la cámara [50], y se estaría en un sistema no calibrado.

- **Control visual libre del modelo**, no necesitando un conocimiento a priori del modelo 3D del objeto, las características correspondientes a las posiciones deseadas se consiguen en una etapa previa fuera de línea conocida como teach-by-showing [85]. En esta técnica el robot es movido a la posición deseada, la cámara toma la imagen del objeto, extrae sus características visuales y las almacena en memoria; estas características visuales representarán en la etapa de control a las características de referencia o deseadas. Como en los otros esquemas de control, este paso es muy importante para el éxito de la tarea de control. En el proceso de control, la diferencia entre las características visuales actuales y las de referencia constituirá el error a minimizar en el espacio de la imagen, un error menor a un umbral determinado significará que se ha alcanzado la posición de referencia deseada con una exactitud que no considera los errores de la calibración. En [112] se estima la orientación relativa de la cámara entre la posición deseada y la actual, el control desacopla la rotación del resto del sistema, se presenta también un análisis de estabilidad detallado. También hay esquemas de control libres del modelo que realizan control visual 3D como en [9] donde la rotación y la traslación son determinadas a través de la matriz esencial estimada a partir de las imágenes de la posición actual y de la posición de referencia [50].

### **2.1.2.5 EN FUNCIÓN DEL MODELO VISUAL-MOTOR.**

Esta clasificación fue propuesta por D. Kragic [98]. En ella se considera como elemento de clasificación el modelo Visual-Motor del sistema, es decir la relación de cambio entre la parte motora del sistema y las características en la imagen. Se dice que es conocido a priori si se dispone de los modelos de los diferentes elementos del sistema, caso contrario se debe realizar una estimación. Se tiene:

- **El modelo Visual-Motor es conocido a Priori**, se conoce la calibración de la cámara, la transformación robot-cámara, la calibración del robot, o el modelo del objeto, en esta clase pertenecen el control visual basado en posición [189], basado en imagen [47] e híbrido [117].
- **El modelo Visual-Motor es estimado**, al no disponer de los modelos de la cámara, del robot o del objeto, se realiza una estimación en línea o fuera de línea utilizando ya sea métodos de aprendizaje por redes neuronales [71], borrosas [164], o neuro-borrosas [173] o por una estimación utilizando métodos recursivos [42] [88] [142] o realizando movimientos linealmente independientes [140] [174].

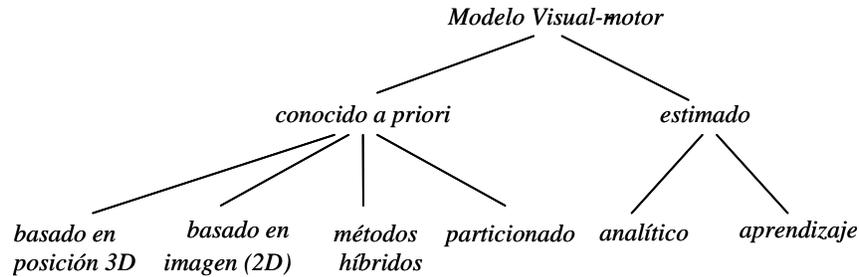


Figura 2.7.- Clasificación de los sistemas de control visual respecto al modelo Visual-Motor.

### 2.1.3 OTRAS TENDENCIAS EN LA INVESTIGACIÓN DEL CONTROL VISUAL.

También podría incluirse otros criterios, como **la ley de control a utilizar**: ley de control proporcional basada en pseudoinversa del jacobiano de la imagen [85] utilizada por la mayoría de autores. En [182] a partir de la ley proporcional se implementa un controlador no lineal adicionando un término más para compensar las incertidumbres. Otro controlador no lineal se implementa en [73]. En [139] se utilizan controladores PI, de asignación de polos y LQG. En [74] se utiliza un controlador óptimo cuadrático lineal LQ. En [136] se implementa un controlador particionado que integra un controlador cinemático con un controlador visual para controlar una unidad pan-til en tareas de seguimiento. En [84] se presenta una combinación del control visual basado en imagen con un controlador de fuerza, para implementar un controlador híbrido visión/fuerza.

Un campo de investigación en control visual es la **planificación de trayectorias**: útil cuando la distancia en la imagen entre la posición inicial y deseada del objeto es muy grande. Lo que se busca es que con una función de error en el plano de la imagen se consiga una trayectoria óptima del objeto (o de la cámara) en el espacio de trabajo a fin de mantener las características visuales en la imagen, evitar oclusiones u obstáculos. Esto debe realizarse sin pasar por el control visual puesto que la robustez en el plano de la imagen pura no estaría completamente asegurada. En [61] se propone un planificador de trayectorias para un sistema de control visual para llevar a cabo tareas de alineamiento tales como la inserción de un disco flexible en un entorno simple cuya estructura es descrita en términos de líneas. Un generador de trayectorias sin el conocimiento a priori del sistema cámara-manipulador ni el entorno, es propuesto por Hosoda [83] con ayuda de las propiedades de la restricción epipolar, se aplica para una tarea donde se evita un obstáculo 3D, la cual es reducida a una simple tarea en el plano de la imagen 2D. Un planificador de trayectorias basado en potenciales se presenta en [127]; experimentalmente se comprueba su robustez frente a distancias grandes entre la posición inicial y deseada además frente a los errores de los modelos. La generación de trayectorias rectas en el espacio proyectivo observado por un sistema estéreo débilmente calibrado es analizada en [157]. En [195] se presenta unas reglas numéricas para el diseño óptimo de trayectorias en el espacio de la imagen aplicado a un caso simple de una cámara unidimensional en un espacio de trabajo bidimensional. En [129] se presenta una estrategia que genera una trayectoria en el espacio de la imagen que

corresponde a un movimiento óptimo de la cámara para el caso cuando la distancia entre la posición de inicio y deseada es grande, asume desconocidos la calibración de la cámara y el modelo del objeto; experimentalmente se comprueban los algoritmos y se sigue eficientemente la trayectoria generada con un control basado en posición. En [120] se tiene una aplicación para evitar oclusiones con información redundante a través de la minimización de una función de costo secundaria. En [128] la planificación de la trayectoria es realizada considerando tanto la restricción de visibilidad y la restricción mecánica, es decir los límites de las articulaciones en base a campos potenciales y una reconstrucción euclídiana escalada a partir de homografías.

Otro campo del control visual es dotar al sistema de **robustez** ya sea frente a errores de modelado o a perturbaciones, a fin de operar en escenarios reales, como en [99] donde se fusiona información de diferentes características presentes en la escena a través de un proceso de votado. En [98] y [100] se presentan tareas combinadas utilizando esta misma técnica. En [182] se implementa un controlador robusto basado en la ley proporcional [85] al adicionarle un término que compensa las incertidumbres. En [190] se usa un esquema PBVS, se aplica el filtro de Kalman para predecir la posición relativa del objeto, se utiliza una base de datos con características visuales adecuadas que son utilizadas para realizar una trayectoria óptima; también se aplican técnicas de fusión sensorial con información de varias cámaras. En [58] se presenta un controlador robusto a los errores de calibración en un sistema estéreo basado en la disparidad y mediciones de flujo óptico. A fin de evitar que las características visuales salgan de la imagen, en [112] se presenta una estrategia denominada Control visual independiente de los parámetros intrínsecos donde se utiliza una cámara con enfoque variable (zooming camera). El controlador propuesto puede aumentar el campo de visión de la escena si el objeto intenta salir fuera de la imagen. En [122] la robustez frente a oclusiones parciales o totales es aumentada gracias a un sistema multicámara y la definición del modelo geométrico del objeto. En [150] [151] se fusiona información procedente de un sistema de control visual basado en flujo de movimiento con información de otro controlador de fuerza para interactuar con un entorno no estructurado.

Se tienen aplicaciones de control visual en sistemas de **alta velocidad**, como por ejemplo el sistema estéreo para seguir y golpear una pelota de ping-pong [5] [156], en [132] basado en una estructura paralela de multiprocesador y un sistema de visión activo masivamente paralelo se consigue una fusión motor-sensorial con velocidad de realimentación visual y de fuerza de 1ms para interactuar con cambios muy rápidos en el entorno. En [75] y [133] se propone una estructura de control jerárquica de alta velocidad basada en un modelo de interacción biológico, utiliza control visual basado en posición, para realizar tareas de agarrado y manipulación de una pelota, las pruebas realizadas muestran que el sistema tiene una alta respuesta y es flexible a los cambios dinámicos del entorno.

A diferencia del uso de puntos en la imagen, pocos trabajos han sido dedicados a **control visual a partir de líneas**, la principal razón es la dificultad de manejar las características de las líneas en la imagen, las cuales representan en geometría proyectiva la proyección de un plano 3D que pasa por el centro óptico de la cámara. Aplicaciones en sistemas monocámara se tiene en [47] donde la tarea es posicionar la cámara con respecto a una autopista representada por tres líneas paralelas que están en un plano, el jacobiano de la imagen es calculado considerando constante la altura a la que se

encuentra la cámara sobre la autopista. En [6] se representa una línea en base a coordenadas de Plücker para desacoplar la ley de control en dos partes: primero alineación de la orientación, y luego alineación del plano de interpretación; la orientación 3D de la línea es detectada con ayuda de un puntero láser. En [64] las coordenadas de Plücker son usadas para representar una línea y una tarea de alineamiento es llevada a cabo como dos tareas simultáneas de alineamiento punto a línea. Aplicaciones con dos vistas se tiene en [59] donde una línea 3D es alineada con otra por medio de un esquema de control híbrido y desacoplado a partir de la homografía entre características de las líneas polares en las imágenes de las posiciones actual y deseada de una cámara catadióptrica. Propiedades geométricas permiten determinar la orientación de la línea para construir una matriz de interacción cuadrada diagonal en bloques. Alineamiento de un aeroplano con las líneas de una autopista se presenta en [15], donde la matriz de interacción calculada a partir de las características desacopladas de las líneas es integrada en las leyes de control lateral y longitudinal utilizadas. En [110] las coordenadas binormalizadas de Plücker son usadas, las propiedades dinámicas de un helicóptero son explotadas para diseñar un esquema de control basado en la función de Lyapunov y técnicas de backstepping. En [155] puntos de desvanecimiento y líneas de desvanecimiento son considerados en un esquema de control visual 2D para controlar un dirigible. En [170] se controla un globo aeroestático para alinearlo con las tres líneas de una autopista usando un controlador LQR. En [171] se realiza la misma aplicación pero con dos líneas, combinados la información visual con otros sensores para controlar el estado de los parámetros del globo. Posición lateral de un pequeño aparato de vuelo con respecto a una autopista es controlada en [55] a través de una estimación parcial de la posición y orientación 3D.

Podría incrementarse el estado del arte si se considera en el control visual criterios como la interpretación de la escena, los algoritmos de visión utilizados, la dinámica del robot [34] [96] [186], la realización de tareas dinámicas [1] [3] [12] [24] [139], aplicaciones en tiempo real, etc.

## **2.2 ESTADO DEL ARTE DE LA ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO DE LA IMAGEN**

Muchas estrategias han sido propuestas en el campo de del Control Visual Basado en Imagen. La mayoría de estas propuestas requieren un conocimiento a priori del sistema que incluye la calibración del robot y los parámetros de la cámara. Se ha comprobado que estos sistemas no son robustos a perturbaciones, a variación de parámetros y a entornos cambiantes.

Para superar estos problemas se han propuestos estrategias de control donde no es necesario conocer de antemano la calibración del robot y de la cámara, a estas estrategias se les denomina de modelo independiente [142], [143]; donde se realiza una estimación en línea del jacobiano visual-motor que representa un jacobiano compuesto entre la matriz de interacción y el jacobiano del robot [8], [90], [98], [101], [162], [174]. El jacobiano visual-motor relaciona directamente la variación de las características visuales de la imagen con la variación de las articulaciones del robot. En el presente

estado del arte, este jacobiano compuesto será referido simplemente como el jacobiano de la imagen.

La realización de una tarea de alineamiento peg-in-hole se presenta en el artículo de Yoshimi and Allen [183], donde se aproxima el jacobiano de la imagen aprovechando la propiedad geométrica de la invarianza rotacional con movimientos de la cámara. La desventaja de este método es la necesidad de conocer el jacobiano del robot y sólo puede ser aplicado a objetos estáticos. Conkie [32] estima el jacobiano de la imagen en base a una aproximación de diferencias finitas; la desventaja de este método es que se realizan más movimientos de los necesarios. Sutanto [174] estima el jacobiano de la imagen en base a un sistema de ecuaciones que son la concatenación de cambios de características y sus correspondientes cambios de articulaciones; para superar singularidades añade movimiento exploratorios basados en la información de dirección de cada movimiento.

El método de estimar el jacobiano de la imagen iterativamente fue inicialmente aplicado por Hosoda y Asada [82] para alcanzar objetos estáticos; utiliza para ello el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos, además propone una ley de control verificada teóricamente con la estabilidad de Lyapunov. Junto con Asada [8] estima el jacobiano en línea en un sistema estéreo con cámaras no calibradas para hacer una tarea de seguimiento con ayuda de marcas en el espacio de trabajo. Implementa un sistema de control visual adaptativo. En [84], también utiliza este método para implementar un controlador híbrido con información de fuerza (sensor de fuerza) y de visión (jacobiano de la imagen), pero esta vez necesita conocer el modelo del robot.

Otra forma de estimar el jacobiano iterativamente es mediante el Método de Broyden [16] que es una generalización del método de la secante para sistemas no lineales, donde no es necesario tener explícitamente una expresión para el jacobiano, sino sólo una aproximación. Uno de los primeros en utilizarlo en robótica fue Jagersand [91] para implementar un controlador adaptativo. Realiza diferentes aplicaciones; en [88] se hace una evaluación del controlador basado en la pseudoinversa del jacobiano en sistemas con diferentes grados de libertad o en sistemas sobre determinados. En [89] se le aplica para especificación de la tarea y planeamiento en términos del espacio de las características de las imágenes. En [90] para síntesis de vistas en línea basado en la imagen, un controlador híbrido fuerza-visión en [141]. En [42] hace una comparación entre un controlador adaptativo basado en la estimación del jacobiano visual-motor frente a otro no adaptativo.

Piepmeyer [143] experimenta con objetos en movimiento. Propone el método de Broyden dinámico para estimar el jacobiano de la imagen donde añade un término que recoge información del objeto de control en movimiento. En [143] y [144] extiende este concepto para la estimación del jacobiano usando el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos RLS, y además comprueba que da mejores resultados frente al ruido e incrementa la estabilidad. En [145] utiliza el método de Broyden estático para realizar seguimiento en base a una ley de control que combina elementos predictivos tales como el esquema de diferencias de primer orden, el filtro  $\alpha \beta$  utilizado en sistemas de radar, y el filtro de Kalman. En [146] se estima el jacobiano en base al algoritmo RLS dinámico para aplicarlo en prevención de obstáculos en base a una función potencial de tipo gaussiano. En [147] también se aplica la prevención de obstáculos en base a dos

diferentes funciones de repulsión que utilizan la inversa de la distancia al obstáculo. En [148] y [149] se estima el jacobiano y el error de velocidad en forma simultánea (método particionado de Broyden) para aplicarlo en una configuración cámara en mano. Kim [101] también utiliza el método de Broyden y mínimos cuadrados recursivos para estimar el jacobiano de la imagen para seguimiento de objetos con predicción autorregresiva usando una ley de control con gran error residual.

Otros métodos de estimación del jacobiano de la imagen han sido propuestos por algunos autores. Bien [13] encuentra la matriz de interacción en base a movimientos de traslación a lo largo de los ejes X, Y, Z, independientemente de la naturaleza de las características visuales. Domingo [43] encuentra el jacobiano de la imagen por medio de una interpolación a partir de un conjunto de jacobianos estimados previamente fuera de línea. Deguchi [38] estima dinámicamente la matriz de interacción utilizando el método de los espacios propios. Qian [159] estima recursivamente el jacobiano en base a las ecuaciones del filtro Kalman-Bucy, implementa un controlador predictivo y lo compara con el controlador propuesto por Sutanto [174]. Shen [167] estima el jacobiano de la imagen en base a momentos, construye un controlador adaptativo que posiciona el objeto en el centro de la imagen con movimientos de traslación de la cámara. Un controlador visual basado en redes neuronales se presenta en [71] el cual está basado en incrementos de articulaciones y características. En [97] se modela la inversa del jacobiano de la imagen con redes neuronales; el modelo considera un modelo para aproximaciones gruesas y otra para un ajuste fino en las proximidades de la posición deseada. En la ley de control se incluye la dinámica del sistema y se demuestra la estabilidad asintótica local para un robot plano cámara en mano. Ritter [154] utiliza técnicas de entrenamiento de una red neuronal para mapear los elementos del jacobiano de la imagen, con la desventaja de que si la configuración cambia, se debe entrenar nuevamente el sistema. En [104] también se estima el jacobiano inverso a partir de una etapa previa de aprendizaje; los resultados de la simulación muestran un mejor comportamiento que el control basado en el jacobiano en cada posición y el basado en el jacobiano de la posición deseada. Sequeira [164] aplica modelos fuzzy para estimar el jacobiano inverso y realiza una comparación con el jacobiano analítico para controlar un robot de tres grados de libertad; los experimentos llevados a cabo son solamente para movimientos planos. En [172] se propone un controlador visual basado en redes neuronales borrosas, y se presentan simulaciones de una tarea de seguimiento para un manipulador de seis grados de libertad. Otro controlador neuro borroso se tiene en [173], donde se estima directamente la inversa de la matriz de interacción gracias a una aproximación neuronal utilizando una descomposición en funciones base. En [121] se hace una comparativa del método analítico con el método de Broyden, correlación, y el jacobiano inverso directo. Las pruebas se hacen realizando tareas secuenciales con movimientos desacoplados. En [158] se determina un jacobiano proyectivo en un sistema estéreo de cámaras no calibradas, donde las articulaciones del robot son representados en el espacio proyectivo de la cámara.

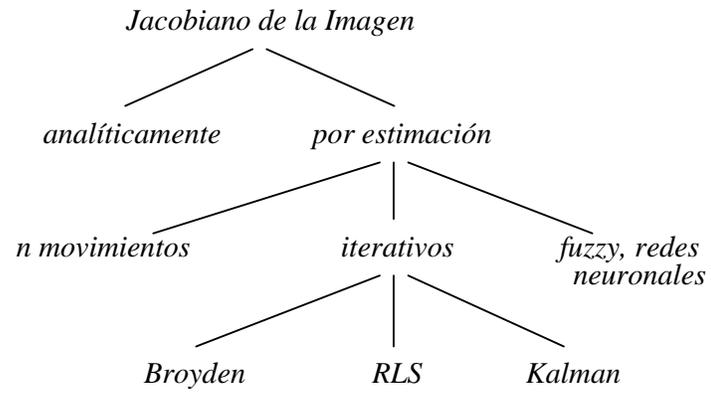


Figura 2.5.- Clasificación de la determinación del jacobiano de la imagen.



# CAPITULO 3

## 3 MODELOS DE CÁMARAS Y ROBOT

En el presente capítulo se presentan los modelos utilizados en el desarrollo de la tesis. Se presenta inicialmente el modelo de una sola cámara para la formación de la imagen de un objeto en el espacio, el cual está basado en la proyección de perspectiva. Se continúa con las relaciones geométricas de un sistema de dos cámaras, que pueden ser distintas o pueden ser una misma cámara en diferente posición e instante de tiempo. Se termina el capítulo con el modelo cinemático del robot utilizado. Los conceptos presentados se complementan con teoría del movimiento del cuerpo rígido cuyas principales relaciones se describen en el anexo A.

### 3.1 MODELO DE UNA CAMARA

#### 3.1.1 MODELO PINHOLE

El modelo de una cámara se basa en el modelo pinhole. En este modelo, la cámara realiza una proyección en perspectiva de un punto espacial  $\mathbf{M}$  a un punto  $\mathbf{m}$  en el plano de la imagen a través del centro óptico de la cámara  $O_c$ . El punto espacial  $\mathbf{M}$  con coordenadas  $(X_c, Y_c, Z_c)$  con referencia al sistema de coordenadas de la cámara, es representado en el plano de la imagen por un punto  $\mathbf{m}$  con coordenadas  $(u, v)$  (que a partir de ahora se referenciarán como coordenadas centrales) con referencia al punto principal (central) de la imagen  $(x_o, y_o)$  (Figura 3.1), el cual se encuentra en el eje óptico de la cámara a una distancia focal  $f$  de su centro óptico (intersección del plano de la imagen y el eje óptico).

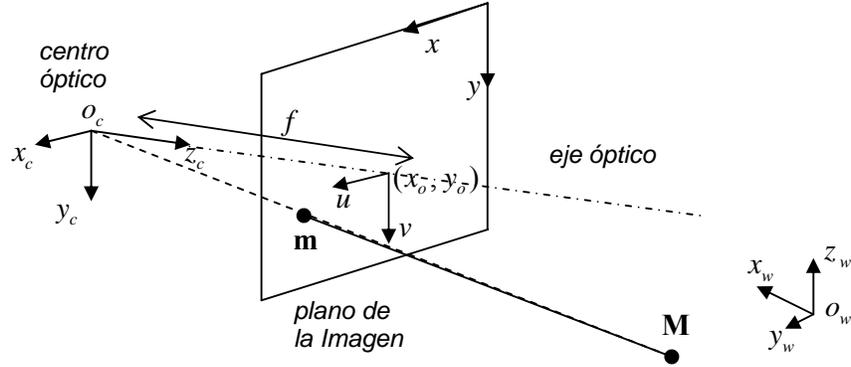


Figura 3.1.- modelo pinhole de la cámara

Por el teorema de Tales se cumple que:

$$\frac{u}{X_c} = \frac{v}{Y_c} = \frac{f}{Z_c} \quad (3.1)$$

llamada transformación en perspectiva, que se puede volver a escribir como:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{f}{Z_c} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad u = f \frac{X_c}{Z_c}; v = f \frac{Y_c}{Z_c} \quad (3.1a)$$

que en forma matricial se puede escribir también como:

$$\lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.1b)$$

donde se ha supuesto un modelo libre de distorsión óptica, y el punto tridimensional está escrito en coordenadas proyectivas (homogéneas).

### 3.1.2 PARÁMETROS INTRÍNSECOS Y EXTRÍNSECOS.

El punto  $\mathbf{m}$  de la imagen generalmente se refiere con respecto al borde superior izquierdo de la imagen que se da en coordenadas  $(x, y)$  en píxeles (que a partir de ahora se referenciarán como coordenadas laterales) realizando la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} x &= x_o + k_x u & \text{ó} & & x &= x_o + k_x f \frac{X_c}{Z_c} \\ y &= y_o + k_y v & & & y &= y_o + k_y f \frac{Y_c}{Z_c} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$k_x$  y  $k_y$  son factores de escala (pixel/mm), y  $f$  es la distancia focal, este par de ecuaciones puede escribirse matricialmente como:

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x f & 0 & x_o \\ 0 & k_y f & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de parámetros intrínsecos, es una matriz invertible  $3 \times 3$  que describe la geometría y óptica de la cámara:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & x_o \\ 0 & f_y & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

donde  $f_x = k_x f$  y  $f_y = k_y f$  son las longitudes focales en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente, representan la magnificación de las coordenadas en el plano de la imagen a las coordenadas de la imagen (en píxeles). Una forma más completa de la matriz de parámetros intrínsecos donde se considera el ángulo entre los ejes de coordenadas del plano de la imagen  $\theta$  (Figura 3.2) se muestra a continuación:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & f_x \cot \theta & x_o \\ 0 & \frac{f_y}{\sin \theta} & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

En (3.5) si  $\theta = 90^\circ$  se consigue (3.4).

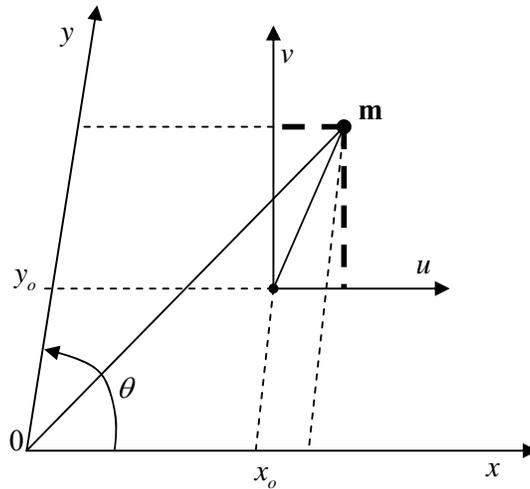


Figura 3.2.- Parámetros intrínsecos de la cámara.

Si se asume que  $f = 1$ , las coordenadas del punto  $\mathbf{m}$  se denominan coordenadas normalizadas [50], de esta manera se considera el plano de la imagen como un espacio proyectivo  $P^2$ . Las coordenadas normalizadas representan coordenadas pertenecientes a un plano imagen ideal ubicado a una distancia del centro óptico igual a la unidad, y está representado por  $\mathbf{q}$ . A partir de la ecuación (3.1) se tiene:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \frac{1}{Z_c} \begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = (u, v, 1)^T \quad (3.6)$$

donde el símbolo  $\tilde{\phantom{x}}$  representa que el punto se expresa en coordenadas proyectivas. Las coordenadas normalizadas se pueden conseguir a partir de las coordenadas en píxeles  $\tilde{\mathbf{m}}$  a través de la matriz de parámetros intrínsecos  $\mathbf{K}$  despejando  $\tilde{\mathbf{q}}$  de la relación:

$$\tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{K}\tilde{\mathbf{q}} \quad (3.7)$$

Los parámetros intrínsecos describen la óptica y geometría de la cámara por lo que también se considera como parámetros intrínsecos las distorsiones radiales  $k_1$ ,  $k_2$  y tangenciales  $p_1$ ,  $p_2$  [178] [193] [51] que se detallan en el apartado 3.1.4.

Un punto espacial  $\tilde{\mathbf{M}}_w$  con coordenadas  $(X_w, Y_w, Z_w, 1)^T$  referidas al sistema de coordenadas del mundo, puede ser transformado al sistema de coordenadas de la cámara  $\tilde{\mathbf{M}}_c$  a través de los parámetros extrínsecos  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$ , donde  $\mathbf{R}$  es una matriz de rotación  $3 \times 3$ , y  $\mathbf{t}$  es el vector de traslación  $3 \times 1$ . Se realiza por lo tanto una transformación rígida en orientación y posición.

De acuerdo a esto, un punto  $\tilde{\mathbf{M}}_w$  con respecto al sistema de coordenadas del mundo se expresará en el sistema de coordenadas de la cámara a través de:

$$\tilde{\mathbf{M}}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_w \quad (3.8)$$

### 3.1.3 MATRIZ DE PROYECCIÓN.

Un punto espacial  $\tilde{\mathbf{M}}_w$  con coordenadas referidas al sistema de coordenadas del mundo, se representa en la imagen por un punto  $\tilde{\mathbf{m}}$  con coordenadas  $(x, y, 1)^T$  referidas a las coordenadas laterales de la imagen, a través de la matriz de proyección  $\mathbf{P}$ :

$$\lambda \tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{M}}_w \quad (3.9)$$

donde  $\lambda$  es un factor de escala. La matriz  $\mathbf{P}$   $3 \times 4$  es una transformación proyectiva de 3D a 2D compuesta por la matriz de parámetros intrínsecos  $\mathbf{K}$ , y los parámetros extrínsecos  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$ . La matriz  $\mathbf{P}$  tiene la forma:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

### 3.1.4 DISTORSION.

Debido a las imperfecciones del lente o del ensamblado se presentan distorsiones ópticas en la cámara y los puntos no se proyectan exactamente donde indica el modelo (Figura 3.3), sino que se ven desplazados unas distancias diferenciales en las direcciones radial y tangencial. Esto se expresa en la siguiente relación:

$$\begin{aligned} u_d &= u_u + D_u(u_u, v_u) \\ v_d &= v_u + D_v(u_u, v_u) \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $(u_u, v_u)$  son coordenadas cenrales de la imagen sin distorsión,  $(u_d, v_d)$  son las mismas pero con distorsión.  $D(u_u, v_u)$  es la distorsión añadida que involucra la distorsión radial y tangencial.

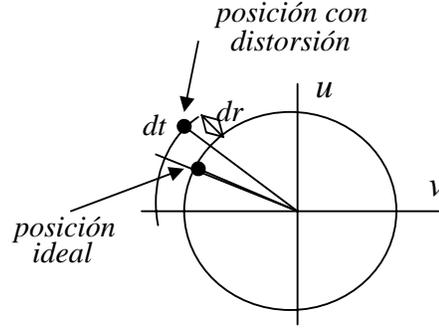


Figura 3.3.- Distorsión radial y tangencial

La distorsión radial es la más dominante y es debida a la imperfección de la lente y está representada por los parámetros  $k_1$  y  $k_2$  (otros modelos consideran  $k_3$  y  $k_4$  que corresponden a términos de orden superior, pero para fines prácticos sólo se consideran  $k_1$  y  $k_2$ ). La distorsión tangencial, causada por efectos del ensamblado del lente, se representa por  $p_1$  y  $p_2$ . La expresión (3.11) se puede expresar más desarrollada, sin considerar términos de orden superior:

$$\begin{aligned} u_d &= u_u + u_u[k_1 r^2 + k_2 r^4] + [2p_1 u_u v_u + p_2(r^2 + 2u_u^2)] \\ v_d &= v_u + v_u[k_1 r^2 + k_2 r^4] + [2p_2 u_u v_u + p_1(r^2 + 2v_u^2)] \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde

$$r^2 = u_u^2 + v_u^2 \quad (3.13)$$

La relación entre las coordenadas laterales  $(x, y)$  y centrales  $(u, v)$  de la cámara es:

$$\begin{aligned} x_d &= u_o + k_x u_d & \text{ó} & & x_u &= u_o + k_x u_u \\ y_d &= v_o + k_y v_d & & & y_u &= v_o + k_y v_u \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $k_x, k_y$  son factores de escala (píxel/mm).

Relacionando (3.12) y (3.14) se obtiene la expresión para hallar las coordenadas laterales de la imagen sin distorsión  $(x_u, y_u)$ :

$$\begin{aligned} x_d &= x_u + (x_u - u_o) \left[ k_1 r^2 + k_2 r^4 + 2p_1 v_u + p_2 \left( \frac{r^2}{u_u} + 2u_u \right) \right] \\ y_d &= y_u + (y_u - v_o) \left[ k_1 r^2 + k_2 r^4 + 2p_2 u_u + p_1 \left( \frac{r^2}{v_u} + 2v_u \right) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde para obtener  $(x_u, y_u)$  se recurre a un proceso iterativo en el cual se supone inicialmente  $(u_u, v_u)$  conocido e igual a  $(u_d, v_d)$ .

### 3.1.5 CALIBRACIÓN DE LA CÁMARA.

En la calibración de la cámara se estiman los parámetros intrínsecos y extrínsecos de la cámara. Su exactitud es importante pues a partir de ellos se obtienen información métrica de la escena tal como dimensiones, profundidad, movimiento a partir de imágenes, posiciones, orientaciones, etc. También en la calibración de la cámara se determinan las distorsiones geométricas producto de las imperfecciones de la óptica de la cámara (distorsiones radiales y tangenciales).

La calibración de la cámara es llevada a cabo al observar un objeto de calibración cuya geometría en el espacio 3D es conocida con una muy buena precisión. Usualmente el objeto de calibración consiste en dos o tres planos perpendiculares entre si en los cuales se ha impreso un patrón de calibración (

Figura 3.4b), los parámetros de la cámara son recuperados a partir de la relación entre las coordenadas tridimensionales del objeto con sus correspondientes proyecciones bidimensionales en la imagen, como por ejemplo el método de transformación lineal directa (DLT). Otros métodos utilizan simplemente un plano con el patrón de calibración impreso (

Figura 3.4a) como el método de Tsay [178] o el de Zhang [193], en éste último los parámetros de la cámara son obtenidas a partir de la transformación 2D entre el plano del patrón y el plano de la imagen. Existen también métodos de autocalibración [126], en los cuales no se utiliza ningún objeto de calibración, y se basan en las imágenes tomadas por la cámara en diferente posición y orientación sobre una escena estática, la rigidez de la escena genera restricciones sobre los parámetros intrínsecos de la cámara que son recuperados a partir de varias imágenes.

Existe en la literatura diversas propuestas para la calibración de cámaras que se han generado a lo largo de los años, como por ejemplo, métodos basados en las propiedades de los puntos de desvanecimiento [17] [29], o el método adaptivo [152] basado en control visual virtual [31] entre otros, que no se detallan por no ser uno de los objetivos de la presente tesis.

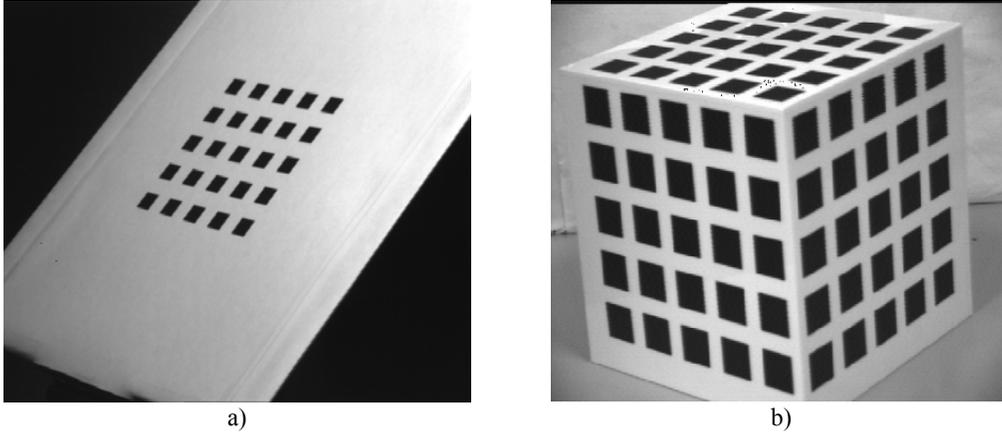


Figura 3.4.- Objetos de calibración: a) planar b) cúbica.

A continuación se describe el método de Zhang, el cual fue el utilizado en la calibración de las cámaras del entorno de pruebas utilizado en la presente tesis. Se eligió el método de Zhang por la flexibilidad en su aplicación pues no se necesita el conocimiento de la posición y orientación del patrón en el espacio de trabajo. La calibración en este método parte de tomar la imagen del patrón ubicado en diferentes posiciones y orientaciones de tal manera que abarque todo el espacio de trabajo.

### 3.1.5.1 MÉTODO DE ZHANG.

Considerando (3.9) y

(3.10), la relación entre un punto 3D  $\tilde{\mathbf{M}} = [X_w \ Y_w \ Z_w \ 1]$  en el sistema de coordenadas del mundo, y su proyección en la imagen  $\tilde{\mathbf{m}} = (x, y, 1)^T$  puede ser escrita como:

$$\lambda \tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{K} [\mathbf{R} \ \mathbf{t}] \tilde{\mathbf{M}} \quad (3.16)$$

donde  $\lambda$  es un factor de escala,  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$  son los parámetros extrínsecos de la cámara,  $\mathbf{K}$  es la matriz de parámetros intrínsecos representada por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & \gamma & x_o \\ 0 & f_y & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $(x_o, y_o)$  son las coordenadas del punto principal de la imagen,  $f_x$  y  $f_y$  son las longitudes focales en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente,  $\gamma$  es el coeficiente que representa la pérdida de perpendicularidad entre los ejes de la imagen.

Si se asume que el patrón de calibración descansa en la coordenada  $Z_w = 0$  en el sistema del mundo, (3.16) puede ser escrita como:

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

donde se ha representado la matriz de rotación  $\mathbf{R}$  por medio de sus columnas  $\mathbf{r}_i$  como  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3]$ . Como todos los puntos del patrón están en el plano  $Z_w = 0$ , se puede asumir que  $\tilde{\mathbf{M}} = [X_w \ Y_w \ 1]$  el cual está relacionado con el punto  $\tilde{\mathbf{m}}$  en la imagen a través de una homografía  $\mathbf{H}$  (ver apartado 3.2.7):

$$\lambda \tilde{\mathbf{m}} = \mathbf{H} \tilde{\mathbf{M}} \quad (3.18)$$

Comparando (3.17) y (3.18) y expresando la homografía en base a sus columnas  $\mathbf{h}_i$  como  $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \mathbf{h}_3]$ , se llega a:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \mathbf{h}_3] = \mathbf{K} [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{t}] \quad (3.19)$$

Por las propiedades de la matriz de rotación  $\mathbf{R}$ , sus dos primeras columnas cumplen con las restricciones de ortonormalidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

considerando (3.19), se puede volver a escribir (3.20) como:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1 &= \mathbf{h}_2^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_1^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

A partir de estas dos restricciones, se encuentran los elementos de  $\mathbf{K}$ , para hallarlos se propone una solución analítica seguida de una optimización no lineal. Si la matriz  $\mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1}$  es expresada de la forma:

$$\mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

donde  $\mathbf{B}$  es una matriz simétrica cuyos elementos son:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_x^2} & \frac{-\gamma}{f_x^2 f_y} & \frac{\gamma v_0 - f_y u_0}{f_x^2 f_y} \\ \frac{-\gamma}{f_x^2 f_y} & \frac{\gamma^2}{f_x^2 f_y^2} + \frac{1}{f_y^2} & \frac{-\gamma(\gamma v_0 - f_y u_0)}{f_x^2 f_y^2} - \frac{v_0}{f_y^2} \\ \frac{\gamma v_0 - f_y u_0}{f_x^2 f_y} & \frac{-\gamma(\gamma v_0 - f_y u_0)}{f_x^2 f_y^2} - \frac{v_0}{f_y^2} & \frac{(\gamma v_0 - f_y u_0)^2}{f_x^2 f_y^2} + \frac{v_0^2}{f_y^2} + 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

y se le puede representar simplemente por un vector de seis elementos  $\mathbf{b} = [B_{11} \ B_{12} \ B_{22} \ B_{13} \ B_{23} \ B_{33}]^T$ . Sea  $\mathbf{h}_i = [h_{i1} \ h_{i2} \ h_{i3}]^T$  la  $i$ -ava columna de la matriz de homografía  $\mathbf{H}$ , entonces se cumple que:

$$\mathbf{h}_i^T \mathbf{B} \mathbf{h}_j = \mathbf{v}_{ij}^T \mathbf{b} \quad (3.24)$$

donde

$$\mathbf{v}_{ij} = [h_{i1} h_{j1}, h_{i1} h_{j2} + h_{i2} h_{j1}, h_{i2} h_{j2}, \\ h_{i3} h_{j1} + h_{i1} h_{j3}, h_{i3} h_{j2} + h_{i2} h_{j3}, h_{i3} h_{j3}]^T \quad (3.25)$$

Por lo tanto las restricciones (3.21) pueden ser re-escritas como una ecuación homogénea en  $\mathbf{b}$  de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{12}^T \\ (\mathbf{v}_{11} - \mathbf{v}_{22})^T \end{bmatrix} \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

se tendrán tantas ecuaciones (3.26) como imágenes del plano se tenga, las cuales se pueden apilar para formar un sistema de la forma

$$\mathbf{V} \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

donde  $\mathbf{V}$  es una matriz  $2n \times 6$ ,  $n$  es el número de imágenes, y debe cumplirse que  $n \geq 3$  para obtener una solución única de  $\mathbf{b}$  hasta un factor de escala (decartando configuraciones degeneradas). Se sabe que la solución a un sistema como (3.27) es el vector propio de  $\mathbf{V}^T \mathbf{V}$  asociado a su valor propio más pequeño. Una vez que  $\mathbf{b}$  es estimado, a partir de éste se obtienen todos los elementos de  $\mathbf{K}$ :

$$\begin{aligned} v_0 &= (B_{12} B_{13} - B_{11} B_{23}) / (B_{11} B_{22} - B_{12}^2) \\ \lambda' &= B_{33} - [B_{13}^2 + v_0 (B_{12} B_{13} - B_{11} B_{23})] / B_{11} \\ f_x &= \sqrt{\lambda' / B_{11}} \\ f_y &= \sqrt{\lambda' B_{11} / (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)} \\ \gamma &= -B_{12} f_x^2 f_y / \lambda' \\ u_0 &= \gamma v_0 / f_y - B_{13} f_x^2 / \lambda' \end{aligned} \quad (3.28)$$

Una vez que se conoce  $\mathbf{K}$ , se calculan los parámetros extrínsecos a partir de (3.19) por:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \lambda \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \lambda \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{t} &= \lambda \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_3 \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde  $\lambda = 1 / \|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1\| = 1 / \|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2\|$ .

Una vez obtenidos estos datos, sirven como datos iniciales para una etapa de refinamiento a través de técnicas iterativas, donde además se estiman las distorsiones radial y tangencial.

### 3.2 MODELO DE DOS CAMARAS.

Se considera dos cámaras fijas observando los objetos presentes en el entorno de trabajo (escena). Esta configuración es capaz de obtener información tridimensional de la escena a través de la información bidimensional que le proporciona cada cámara, consiguiendo una visión espacial del conjunto (visión estéreo).

La visión estéreo se puede estudiar desde dos puntos de vista: estática y dinámica, en la presente tesis se estudia el caso de visión estéreo estática, para cuyo estudio se asume que:

- Las cámaras capturan información de la escena sin desfase de tiempo.
- No se produce movimiento de objetos durante el intervalo de tiempo en que se realiza la adquisición de las imágenes.

El modelo de dos cámaras también se denomina sistema binocular, ya sea de ejes convergentes o paralelos, se analiza solamente el caso general de ejes convergentes, es decir sus ejes ópticos se cruzan en el espacio y será analizado desde el punto de vista de la geometría proyectiva.

#### 3.2.1 GEOMETRÍA EPIPOLAR.

La geometría epipolar recoge toda la información geométrica de un sistema de dos cámaras.

Sea  $C$  y  $C'$  los centros ópticos de la primera y segunda cámara, y un punto espacial  $\tilde{\mathbf{M}}$  con proyecciones  $\tilde{\mathbf{m}}$  y  $\tilde{\mathbf{m}}'$  en la primera y segunda imagen respectivamente (Figura 3.5). El plano que se forma entre el punto espacial  $\tilde{\mathbf{M}}$  y los centros ópticos  $C$  y  $C'$  es denominado como plano epipolar. La intersección de la línea que une  $C$  y  $C'$  con ambos planos de imagen determina los epipolos  $\tilde{\mathbf{e}}$  y  $\tilde{\mathbf{e}}'$  en la primera y segunda imagen

respectivamente. Las líneas que se forman entre  $\tilde{\mathbf{m}}$  y  $\tilde{\mathbf{e}}$  en la primera imagen, y entre  $\tilde{\mathbf{m}}'$  y  $\tilde{\mathbf{e}}'$  en la segunda imagen son las líneas epipolares  $\tilde{\mathbf{l}}_m$  y  $\tilde{\mathbf{l}}_m'$  respectivamente, que al mismo tiempo corresponden a la intersección del plano epipolar con cada plano imagen.

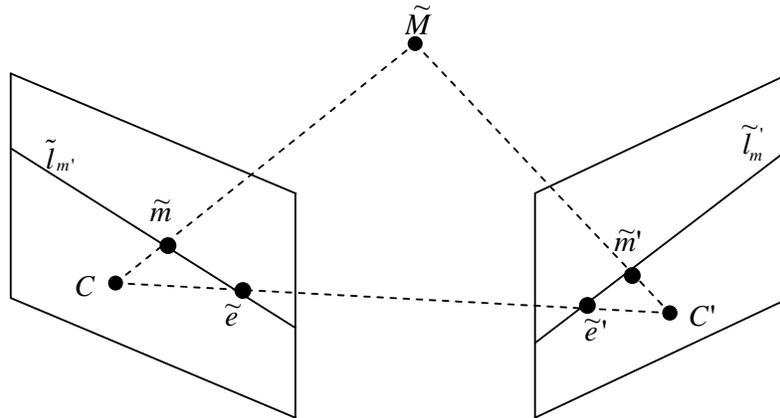


Figura 3.5.- Relaciones geométricas de las proyecciones de un punto 3D en un sistema epipolar de dos vistas

A partir de la descripción geométrica anterior se puede deducir que para cada posición del punto  $\tilde{M}$  en el espacio existirá un plano epipolar con sus respectivas líneas epipolares, todas ellas pasando por el epipolo de la imagen (Figura 3.6), formándose haces de líneas epipolares en cada plano imagen, por lo que se podría tener el siguiente enunciado: “dos líneas epipolares son correspondientes si y sólo si pertenecen al mismo plano epipolar”.

La principal propiedad geométrica de la geometría epipolar es conocida como la propiedad de restricción epipolar, que consiste en que para cada punto  $\tilde{\mathbf{m}}$  en la primera imagen, su correspondiente punto  $\tilde{\mathbf{m}}'$  en la segunda imagen está obligado a pertenecer a su correspondiente línea epipolar  $\tilde{\mathbf{l}}_m$ .

Dado un punto  $\tilde{\mathbf{m}}$  en la primera imagen, su correspondiente línea epipolar  $\tilde{\mathbf{l}}_m$  en la segunda imagen puede ser calculada fácilmente, y el punto correspondido  $\tilde{\mathbf{m}}'$  es buscado solamente a lo largo de  $\tilde{\mathbf{l}}_m$  y ya no en toda la imagen.

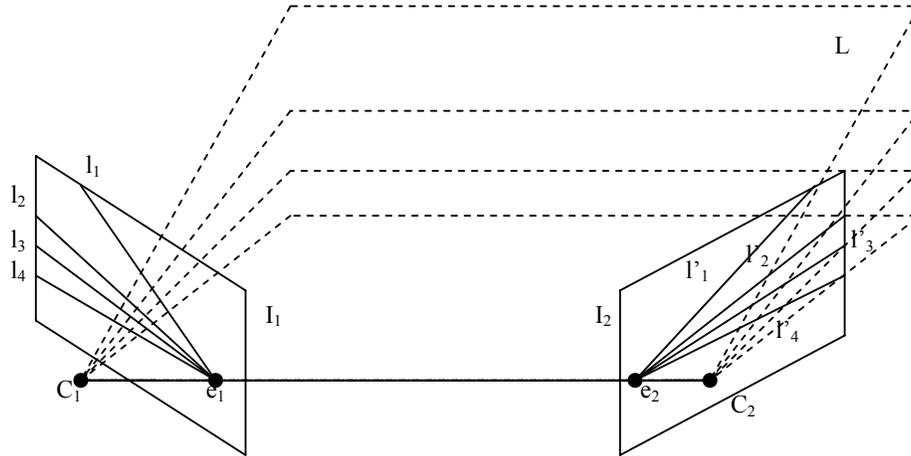


Figura 3.6.- Planos epipolares

Si los planos de ambas cámaras pertenecen al mismo plano (sistema de cámaras paralelas), sus epipolos caerán en el infinito y sus líneas epipolares serán paralelas. Es frecuente ver que cuando los planos de ambas cámaras están casi en el mismo plano, sus epipolos caerán muy lejos de sus imágenes, y sus líneas epipolares aparentan ser paralelas, algunos ejemplos pueden verse en [191].

### 3.2.2 LA MATRIZ FUNDAMENTAL.

La matriz fundamental  $\mathbf{F}$  [50][191], condensa la información de la geometría epipolar. Resume toda la información de correspondencia entre puntos en ambas imágenes originados por la proyección de un mismo punto espacial. Es una matriz  $3 \times 3$  singular (por consiguiente se cumple que  $\det(\mathbf{F}) = 0$ ) de 7 grados de libertad.

Un punto  $\tilde{\mathbf{m}}$  en la primera imagen y su correspondiente línea epipolar en la segunda imagen (línea epipolar derecha) está relacionado por la matriz fundamental por:

$$\tilde{\mathbf{l}}_m' = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}} \quad (3.30)$$

Igualmente, para la línea epipolar  $\tilde{\mathbf{l}}_{m'}$  de la primera imagen (línea epipolar izquierda) se tiene:

$$\tilde{\mathbf{l}}_{m'} = \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{m}}' \quad (3.31)$$

Lo que significa que la matriz fundamental realiza una transformación de punto (coordenadas en píxeles) a línea. En geometría proyectiva a estas transformaciones se las conoce como correlaciones.

### 3.2.3 PROPIEDAD DE RESTRICCIÓN EPIPOLAR.

Si un punto  $\tilde{\mathbf{m}}'$  en la segunda imagen, pertenece a la línea epipolar  $\tilde{\mathbf{I}}_m$ , cumple que:

$$\tilde{\mathbf{m}}'^T \tilde{\mathbf{I}}_m = 0 \quad (3.32)$$

reemplazando  $\tilde{\mathbf{I}}_m$  por su relación con  $\mathbf{F}$  se tiene la ecuación de restricción epipolar izquierda-derecha:

$$\tilde{\mathbf{m}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}} = 0 \quad (3.33)$$

de modo similar, también se obtiene la ecuación de restricción epipolar derecha-izquierda:

$$\tilde{\mathbf{m}}^T \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{m}}' = 0 \quad (3.34)$$

observando la ecuación (3.33), la matriz fundamental relaciona puntos correspondidos en ambas imágenes. Los epipolos  $\tilde{\mathbf{e}}$  y  $\tilde{\mathbf{e}}'$  representan los espacios nulos de la matriz fundamental  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^T$  respectivamente, pues se cumple:

$$\mathbf{F} \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{e}}' = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

Como  $\mathbf{F}$  sólo depende de siete parámetros, se tiene menor información que en las dos matrices de proyección  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{P}'$  los cuales dependen de hasta 22 parámetros. Por lo que la información contenida en la matriz fundamental es suficiente solamente para una recuperar información proyectiva de un entorno tridimensional [49].

En un sistema de dos cámaras, si consideramos  $(\mathbf{R}, \mathbf{t})$  la rotación y traslación del sistema de coordenadas de la primera cámara respecto al sistema de la segunda, y asumimos que un punto  $\mathbf{M}$  en el espacio esta referido al sistema de coordenadas de la primera cámara, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{\mathbf{m}} &= \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda' \tilde{\mathbf{m}}' &= \mathbf{K}' \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{K}'$  son las matrices de parámetros intrínsecos de la primera y segunda cámara respectivamente,  $\lambda$  y  $\lambda'$  factores de escala. Eliminado  $\mathbf{M}$ ,  $\lambda$  y  $\lambda'$  de las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\tilde{\mathbf{m}}'^T \mathbf{K}'^{-T} [\mathbf{t}]_x \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1} \tilde{\mathbf{m}} = 0 \quad (3.37)$$

comparando con (3.33) se tiene que

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}'^{-T} [\mathbf{t}]_x \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1} \quad (3.38)$$

donde  $[\mathbf{t}]_x$  es la matriz skew symmetric de  $\mathbf{t}$ .

### 3.2.4 MATRIZ ESENCIAL.

A partir de la ecuación (3.38), se define la matriz esencial [108] como :

$$\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_x \mathbf{R} \quad (3.39)$$

La matriz esencial  $\mathbf{E}$  es también una matriz singular (pero con sus dos valores singulares iguales), posee cinco grados de libertad: tres por la rotación  $\mathbf{R}$  y dos por la traslación  $\mathbf{t}$ . De (3.38) y (3.39) se tiene:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{K}^{-1} \quad (3.40)$$

Es decir si se tienen las cámaras calibradas, se puede determinar la matriz esencial a partir de la matriz fundamental o directamente [108].

Considerando las relaciones anteriores, la ecuación de restricción epipolar también se puede escribir en función a la matriz esencial:

$$\tilde{\mathbf{q}}'^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.41)$$

donde  $\tilde{\mathbf{q}}'$  y  $\tilde{\mathbf{q}}$  son coordenadas normalizadas, por lo que  $\mathbf{E}$  relaciona puntos correspondientes en ambas imágenes en coordenadas métricas (ver anexo B).

#### 3.2.4.1 RECUPERACIÓN DE $\mathbf{R}$ Y $\mathbf{t}$ A PARTIR DE LA MATRIZ ESENCIAL.

Basado en la propiedad de que la matriz esencial posee dos valores singulares iguales y un tercero igual a cero, y considerando su expresión en (3.39), se puede recuperar tanto  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$  (rotación y traslación entre los sistemas de coordenadas de la primera y segunda cámara,  $\mathbf{t}$  sólo hasta un factor de escala, esto debido a la ambigüedad profundidad/velocidad, que dice que es imposible determinar si la 2da imagen es debida a que el objeto se ha movido lentamente pero cerca de la cámara o rápidamente pero lejos de la cámara) con ayuda de una descomposición singular **SVD** (ver anexo C) [66] [69]. Aplicando la descomposición singular,  $\mathbf{E}$  es descompuesta como:

$$\mathbf{E} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^T \quad (3.42)$$

donde  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal de la forma:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

y  $\mathbf{U}, \mathbf{V}^T$  son matrices ortogonales. Definimos la matriz ortogonal  $\mathbf{W}$ , y la matriz skew symmetric  $\mathbf{Z}$  como:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

de tal manera que se cumpla  $\mathbf{Z} = -\mathbf{DW}$ .

Se puede recuperar la rotación  $\mathbf{R}$  y la traslación  $\mathbf{t}$  entre los sistemas de ambas cámaras, de tal manera que sus respectivas matrices de proyección  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{P}'$  cumplan que

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= [\mathbf{I} | \mathbf{0}] \\ \mathbf{P}' &= [\mathbf{R} | \mathbf{t}] \end{aligned} \quad (3.45)$$

Si definimos la matriz  $\mathbf{S}$  como

$$\mathbf{S} = [\mathbf{t}]_x \quad (3.46)$$

se cumple que

$$\mathbf{S}\mathbf{t} = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

además se asume que  $\|\mathbf{t}\|=1$ . Al ser la matriz  $\mathbf{S}$  skew symmetric, se puede expresar como

$$\mathbf{S} = \lambda \mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{U}^T \quad (3.48)$$

donde  $\lambda$  es un escalar (inicialmente asumiremos  $\lambda = 1$ ).

$\mathbf{R}$  puede ser escrita como  $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{V}^T$  donde  $\mathbf{X}$  es otra matriz de rotación, reemplazando  $\mathbf{R}$  en (3.39) y considerando (3.46) y (3.48):

$$\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{R} = (\mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{U}^T)(\mathbf{U}\mathbf{X}\mathbf{V}^T) = \mathbf{U}(\mathbf{Z}\mathbf{X})\mathbf{V}^T \quad (3.49)$$

Comparando con la descomposición singular de  $\mathbf{E}$ , ecuación (3.42) se halla que  $\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{D}$ , al ser  $\mathbf{X}$  una matriz de rotación, se puede elegir  $\mathbf{X} = \mathbf{W}$  ó  $\mathbf{X} = \mathbf{W}^T$ .

A partir de (3.47) y (3.48), se encuentra que  $\mathbf{Z}\mathbf{U}^T\mathbf{t} = \mathbf{0}$ , si escribimos  $\mathbf{U}$  en función de sus columnas:  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3]$ , esta expresión será:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \mathbf{t} \\ \mathbf{u}_2^T \mathbf{t} \\ \mathbf{u}_3^T \mathbf{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^T \mathbf{t} \\ -\mathbf{u}_1^T \mathbf{t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

de donde se obtiene que  $\mathbf{t} = \mathbf{u}_3$  que puede tomar valor positivo o negativo. Resumiendo, se tienen cuatro posibles soluciones para recuperar  $(\mathbf{R} | \mathbf{t})$ :

$$\begin{aligned}
 &(\mathbf{UWV}^T | \alpha \mathbf{u}_3) \\
 &(\mathbf{UWV}^T | -\alpha \mathbf{u}_3) \\
 &(\mathbf{UW}^T \mathbf{V}^T | \alpha \mathbf{u}_3) \\
 &(\mathbf{UW}^T \mathbf{V}^T | -\alpha \mathbf{u}_3)
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

donde se ha considerado un factor de escala  $\alpha$  en la traslación dada la naturaleza proyectiva de la matriz esencial.

La elección entre estas cuatro transformaciones se determina por la condición de que los puntos del espacio de trabajo deben estar al frente de ambas cámaras. Esto se puede conseguir al transformar un punto arbitrario del espacio de trabajo, y averiguar si cumple con la condición, eliminando de este modo tres alternativas. Debido a los errores presentes, los valores singulares de la matriz  $\mathbf{D}$  resultado de la descomposición  $\mathbf{USV}$  (3.42), son de la forma  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \neq 0$ , es decir no cumplen con las condiciones teóricas por lo que  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  y  $\sigma_3 \neq 0$ ; una buena aproximación es hacer  $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$  y  $\sigma_3 = 0$  de tal manera que  $\mathbf{D}' = \text{diag}(\sigma, \sigma, 0)$ , donde  $\mathbf{E}' = \mathbf{UD}'\mathbf{V}^T$  es el valor más aproximado al valor verdadero  $\mathbf{E}$ .

### 3.2.5 DETERMINACIÓN DE LA MATRIZ FUNDAMENTAL.

La geometría epipolar de un sistema estéreo está representada por el conocimiento de la matriz fundamental. Al ser uno de los principales aportes de la presente tesis la incorporación de la información de la geometría epipolar en la estimación del jacobiano de la imagen que se describirá en el siguiente capítulo, en este apartado se describirá los métodos más representativos para la estimación de la matriz fundamental.

La determinación de la matriz fundamental se basa en la ecuación de restricción epipolar (3.33) [69] [192] aplicado a un número suficiente de puntos correspondidos. Al reescribir (3.33) para  $n$  puntos, esta expresión queda:

$$\tilde{\mathbf{m}}_i^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}}_i = 0 \tag{3.52}$$

donde  $i = 1, \dots, n$ ; y  $\tilde{\mathbf{m}}_i = (x_i, y_i, 1)^T$  y  $\tilde{\mathbf{m}}'_i = (x'_i, y'_i, 1)^T$  son puntos correspondidos en la primera y segunda imagen respectivamente, expresados en coordenadas proyectivas. Desarrollando la ecuación (3.52) y considerando que la matriz fundamental  $\mathbf{F}$  es de la forma:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

se tiene:

$$x'_i x_i f_{11} + x'_i y_i f_{12} + x'_i f_{13} + y'_i x_i f_{21} + y'_i y_i f_{22} + y'_i f_{23} + x_i f_{31} + y_i f_{32} + f_{33} = 0 \quad (3.54)$$

esta ecuación puede ser expresada como un producto interno:

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{f} = 0 \quad (3.55)$$

donde

$$\mathbf{A}_i = [x'_i x_i, x'_i y_i, x'_i, y'_i x_i, y'_i y_i, y'_i, x_i, y_i, 1]^T \quad (3.56)$$

y

$$\mathbf{f} = [f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33}]^T \quad (3.57)$$

para  $n$  puntos correspondidos, se formará un sistema lineal y homogéneo de  $n$  ecuaciones de la forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.58)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n^T \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

y no siendo válida la solución trivial  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ . Si  $\mathbf{A}$  es de rango 8 entonces es posible hallar  $\mathbf{f}$  hasta un factor de escala, lo cual es cierto pues la matriz fundamental es homogénea, por lo que son necesarios al menos 8 puntos correspondidos para que (3.58) tenga solución. Se pueden aplicar métodos lineales, no lineales o robustos (ver Figura 3.7).

El caso más sencillo de los métodos lineales es el método de los 7 puntos donde se requieren para la determinación de  $\mathbf{F}$  solamente 7 puntos correspondidos. Se tiene por lo tanto una matriz  $\mathbf{A}$   $7 \times 9$  de rango 7, donde la solución de (3.58) es una combinación lineal de  $\mathbf{f}_1$  y  $\mathbf{f}_2$  de la forma  $\alpha \mathbf{f}_1 + (1-\alpha) \mathbf{f}_2$ , donde  $\mathbf{f}_1$  y  $\mathbf{f}_2$  son vectores que forman el espacio nulo derecho de  $\mathbf{A}$ . La determinación del escalar  $\alpha$  se consigue utilizando la restricción de singularidad:

$$\text{rank}(\mathbf{F}) = 2 \quad \text{por lo tanto} \quad \det(\mathbf{F}) = 0 \quad (3.60)$$

La principal ventaja de este método es que  $\mathbf{F}$  es calculada sólo con 7 puntos, pero esto también se convierte en desventaja cuando algunos puntos no están bien correspondidos, además este método no admite redundancia, es decir no pueden utilizarse más de 7 puntos.

Los métodos de 8 puntos si admiten redundancia, pues se realiza una minimización del error de la ecuación (3.52) de la forma  $\min \sum_i (\mathbf{m}_i^T \mathbf{F} \mathbf{m}_i)^2$ . El método mínimos cuadrados asume el último elemento de  $\mathbf{F}$  valor 1, lo cual es válido al ser una matriz homogénea, formándose un sistema de la forma  $\mathbf{A}' \mathbf{f}' = \mathbf{c}_9$ , donde  $\mathbf{A}'$  es una matriz  $n \times 8$ ,  $\mathbf{f}'$  los ocho primeros elementos de  $\mathbf{f}$ , y  $\mathbf{c}_9$  la novena columna de  $\mathbf{A}$  con signo cambiado; la resolución de  $\mathbf{f}'$ , se realiza con el método de solución de ecuaciones normales. Existe otro método basado en el análisis de los vectores propios, que considera la solución de la ecuación homogénea (3.58) como el vector propio asociado al menor valor propio de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ; una forma de hallar este vector es utilizando las propiedades de la descomposición singular *SVD* (ver Anexo C). Los métodos lineales reducen significativamente el tiempo de computación pero son muy sensitivos al ruido o a falsas correspondencias, aún con un gran número de datos de entrada (pues estos no añaden información adicional, solamente estabilidad numérica). Debido a que la restricción  $\det(\mathbf{F})=0$  no es satisfecha, causan inconsistencias en la geometría epipolar en las cercanías de los epipolos (es decir, si se cumple que  $\det(\mathbf{F})=0$ , entonces el epipolo  $\mathbf{e}$  satisface que  $\mathbf{F}\mathbf{e} = 0$ ). Hartley [67] además propone normalizar los datos de entrada (ver apartado 3.2.6.1) y forzar a que  $\mathbf{F}$  cumpla con la condición de singularidad (ver apartado 3.2.6.2), consiguiéndose muy buenos resultados.

Los métodos no lineales igual que los lineales, tampoco toman en cuenta la restricción del determinante, por lo que su comportamiento es muy parecido; se basan en criterios geométricos y son resueltos principalmente por técnicas iterativas, y utilizan un método lineal para la determinación de una matriz fundamental inicial.

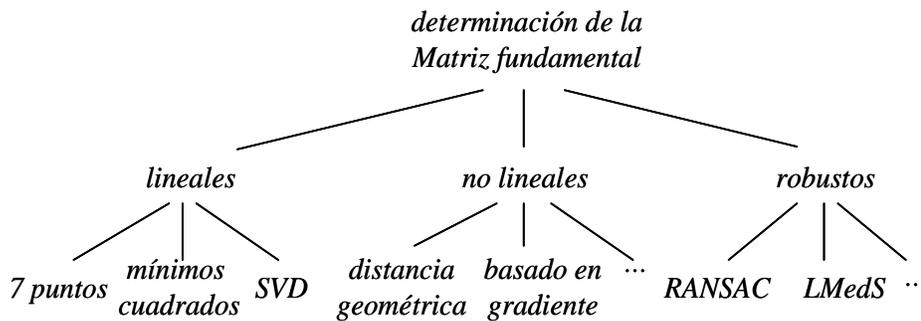


Figura 3.7.- Métodos de estimación de la matriz fundamental.

En aplicaciones automatizadas es frecuente encontrar que la información visual no sólo tiene presencia de ruido, sino, también de datos contaminados (*outliers*), que son datos aislados groseramente distorsionados, estos son de dos tipos: malas localizaciones y

falsas correspondencias. Por lo que el ruido y los outliers afectan severamente la precisión en la determinación de la matriz fundamental dispersando su solución, esto ocurre principalmente cuando se aplican métodos lineales. En tales circunstancias los métodos robustos son necesarios, pues descartan aquellos datos que escapan a la tendencia general de los datos de entrada. Por ejemplo en la (Figura 3.8) se tiene un conjunto de siete puntos de entrada, y se desea estimar la recta que represente a ellos. Se observa la presencia de un outlier (punto 7). Aplicando un método lineal (mínimos cuadrados), la solución sería la marcada con línea discontinua, pero por un método robusto, se tiene la marcada con línea llena, la cual representa más adecuadamente a los datos de entrada. Hay varios métodos robustos, los más conocidos: estimadores M, RANSAC y LMedS los cuales pueden usarse en presencia de outliers y puntos mal correspondidos. El método de los estimadores M minimizan una función de costo de la forma  $\min \sum_i w_i (\mathbf{m}_i^T \mathbf{F} \mathbf{m}_i)^2$  donde  $w_i$  es una función de peso cuya expresión depende

del tipo de estimador a utilizar [69]. LMedS y RANSAC son muy parecidos, ambos métodos seleccionan aleatoriamente un conjunto de puntos a partir del cual calculan la matriz fundamental por un método lineal, la diferencia entre ellos es la forma de elegir la matriz fundamental final. LMedS calcula para cada  $\mathbf{F}$  hallada, la mediana de las distancias entre los puntos y su correspondiente línea epipolar, la matriz fundamental buscada será la que corresponda a la menor mediana. RANSAC calcula el número de inliers para el cual la  $\mathbf{F}$  lo maximiza, una vez descartados los outliers, se recalcula la  $\mathbf{F}$  con el fin de obtener mejores resultados.

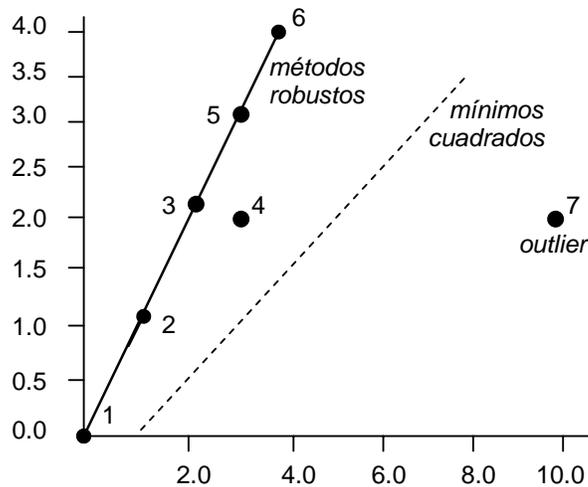


Figura 3.8.- Comparación entre un método lineal y otro robusto.

### 3.2.5.1 METODO DE MÍNIMOS CUADRADOS.

Lo que se busca es minimizar la función de coste:

$$\min \sum_i (\tilde{\mathbf{m}}_i^T \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{m}}_i)^2 \tag{3.61}$$

en forma matricial:

$$\min \|\mathbf{A}\mathbf{f}\|^2 \quad (3.62)$$

donde  $\mathbf{f}$  está definido hasta un factor de escala. Si se supone que  $f_{33} \neq 0$ , se puede escalar a  $f_{33} = 1$ , despejándose la última columna de  $\mathbf{A}_i$  en la ecuación (3.55) para formar el nuevo sistema:

$$\mathbf{A}'\mathbf{f}' = \mathbf{c}_9 \quad (3.63)$$

donde  $\mathbf{A}'$  es la matriz  $n \times 8$  formada con las ocho primeras columnas de la matriz  $\mathbf{A}$ , y  $\mathbf{f}'$  está compuesto con los primeros ocho elementos de  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{c}_9$  es el vector de ocho elementos con valor -1; como el sistema es sobredeterminado, se aplica el método de mínimos cuadrados, siendo la solución:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{A}'^+ \mathbf{c}_9 \quad (3.64)$$

donde  $\mathbf{A}'^+$  es la pseudoinversa de  $\mathbf{A}'$  que tiene la expresión:

$$\mathbf{A}'^+ = (\mathbf{A}'^T \mathbf{A}')^{-1} \mathbf{A}'^T \quad (3.65)$$

Hay que hacer notar que el método de mínimos cuadrados no es aplicable si algún punto cae en el infinito, pues de ser así, las ecuaciones no se podrían aplicar a un punto de la forma  $\tilde{\mathbf{m}}_i = (x_i, y_i, 0)^T$ . Esto es una desventaja de este método principalmente en aplicaciones de reconstrucción proyectiva donde algún punto a reconstruir puede caer en el infinito.

### 3.2.5.2 MÉTODO BASADO EN LA DESCOMPOSICIÓN SINGULAR SVD.

Imponiendo la restricción que la norma de  $\mathbf{f}$  sea igual a uno, el problema de minimización se convierte en:

$$\min \|\mathbf{A}\mathbf{f}\|^2 \quad \text{sujeto a } \|\mathbf{f}\| = 1 \quad (3.66)$$

se tiene entonces un problema de minimización por multiplicadores de Lagrange, cuya solución es [192]:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{f} = \lambda \mathbf{f} \quad (3.67)$$

por lo que la solución a  $\mathbf{f}$  es el vector propio de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  asociado a su menor valor propio. Aplicando las propiedades de la descomposición singular SVD de  $\mathbf{A}$ , es decir si  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ , el vector propio asociado al menor valor propio buscado, es la última columna de  $\mathbf{V}$ .

### 3.2.5.3 MÉTODO DE LOS 7 PUNTOS.

Se sabe que la matriz fundamental  $\mathbf{f}$  tiene 7 grados de libertad, por lo que 7 es el mínimo número puntos correspondidos requeridos para tener una solución de  $\mathbf{f}$ . En este caso  $n = 7$ , y el rango de  $\mathbf{A}$  es 7. La solución de este sistema se puede encontrar como una combinación lineal de los vectores  $\mathbf{f}_1$  y  $\mathbf{f}_2$  que generan el espacio nulo derecho de  $\mathbf{A}$ . Estos vectores  $\mathbf{f}_1$  y  $\mathbf{f}_2$  se pueden encontrar en base a las propiedades de la descomposición SVD. Entonces aplicando la descomposición SDV a la matriz  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{f}_1$  y  $\mathbf{f}_2$  son matrices  $3 \times 3$  cuyos elementos son respectivamente las dos últimas columnas de  $\mathbf{V}^T$ . Al ser homogénea la matriz fundamental  $\mathbf{f}$  buscada, se la puede hallar como una combinación lineal de  $\mathbf{f}_1$  y  $\mathbf{f}_2$  con una sola constante  $\alpha$ :

$$\mathbf{f} = \alpha \mathbf{f}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{f}_2 \quad (3.68)$$

Aplicando la restricción de que el determinante de la matriz fundamental es cero, se obtiene una ecuación cúbica de  $\alpha$ , eligiendo de las tres soluciones, aquella que es real.

$$\det[\alpha \mathbf{f}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{f}_2] = 0 \quad (3.69)$$

si hay tres soluciones reales, se elige aquella que reemplazando en la ecuación de restricción epipolar (3.52), minimice el error.

### 3.2.5.4 MÉTODO DE MINIMIZAR LA DISTANCIA GEOMÉTRICA A LA CORRESPONDIENTE LÍNEA EPIPOLAR.

Se minimiza las distancias entre cada punto y sus correspondientes líneas epipolares  $d(\tilde{\mathbf{m}}'_i, \mathbf{I}'_i)$ , esta distancia es [192]:

$$d(\tilde{\mathbf{m}}'_i, \mathbf{I}'_i) = \frac{\tilde{\mathbf{m}}'^T_i \mathbf{I}'_i}{\sqrt{l_1'^2 + l_2'^2}} = \frac{\tilde{\mathbf{m}}'^T_i \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}}_i}{\sqrt{l_1'^2 + l_2'^2}} \quad (3.70)$$

donde  $\mathbf{I}'_i = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}}_i = [l_1', l_2', l_3']^T$ , considerando ambas imágenes, la función de coste toma la siguiente forma:

$$\min \sum (d^2(\tilde{\mathbf{m}}'_i, \mathbf{I}'_i) + d^2(\tilde{\mathbf{m}}_i, \mathbf{I}_i)) \quad (3.71)$$

considerando  $\mathbf{I}_i = \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{m}}'_i = [l_1, l_2, l_3]^T$ , y además que  $\tilde{\mathbf{m}}'^T_i \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}}_i = \tilde{\mathbf{m}}_i^T \mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{m}}'_i$ , la ecuación (3.70), se tiene:

$$\min \sum w_i^2 (\tilde{\mathbf{m}}'^T_i \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}}_i)^2 \quad (3.72)$$

donde:

$$w_i = \left( \frac{1}{l_1^2 + l_2^2} + \frac{1}{l_1'^2 + l_2'^2} \right)^{1/2} \quad (3.73)$$

que es un problema de mínimos cuadrados ponderados. Si se puede calcular  $w_i$  para cada punto correspondido y reemplazarlo en su respectiva ecuación lineal, es lo mismo que reemplazar en (3.55)  $\mathbf{A}_i$  por  $w_i \mathbf{A}_i$  y puede ser resuelto por el método de mínimos cuadrados. El único problema es que  $w_i$  depende al mismo tiempo de  $\mathbf{F}$ , para superar esto se aplica un método iterativo: primero asumimos  $w_i = 1$  y obtenemos una matriz fundamental inicial hallada con un método lineal, entonces  $w_i$  es calculado a partir de esta solución inicial. Se resuelve (3.72) mejorando la solución, este procedimiento se repite hasta conseguir un umbral de error establecido.

### 3.2.5.5 MÉTODO RANSAC.

A partir de los datos de entrada, se encuentran aleatoriamente  $N$  subconjuntos de siete puntos correspondidos según la expresión:

$$N = \frac{\log(1-P)}{\log\left[1-(1-\varepsilon)^p\right]} \quad (3.74)$$

donde  $P$  es la probabilidad de que al menos uno de los  $N$  subconjuntos esté libre de outliers,  $\varepsilon$  porcentaje de outliers, y  $p$  es el número de elementos de los subconjuntos, para nuestro caso tomamos  $p=7$ . Para cada subconjunto se calcula la matriz fundamental en base al método de los 7 puntos.

Con cada una de las  $N$  matrices fundamentales calculadas, y considerando la totalidad de datos de entrada, se determinan las correspondientes líneas epipolares y los errores (distancias entre un punto y su correspondiente línea epipolar) para la imagen izquierda y derecha respectivamente:

$$err_i = \tilde{\mathbf{m}}_i^T \tilde{\mathbf{l}}_{m_i} \quad \text{y} \quad err'_i = \tilde{\mathbf{m}}_i'^T \tilde{\mathbf{l}}_{m_i}' \quad (3.75)$$

estos errores son evaluados según un umbral  $T$ , generando nuevos subconjuntos de puntos que cumplan con la relación:

$$(err_i \leq T) \text{AND} (err'_i \leq T) \quad (3.76)$$

Si el punto evaluado no cumple con la expresión (3.76), será considerado un outlier y por lo tanto desechado. El umbral  $T$  depende del error de detección de las características en la imagen, si se considera que es de tipo gaussiano, depende de la desviación típica  $\sigma$ , en la práctica este umbral es elegido según la experiencia.

La matriz fundamental buscada será calculada con un método lineal a partir del subconjunto con la mayor cantidad de puntos que cumplan con la relación (3.76).

### 3.2.5.6 MÉTODO DE LA MÍNIMA MEDIANA LMedS.

Es una variación del método RANSAC, la diferencia está en la utilización de la mediana como elemento de discriminación y el uso de un umbral adaptivo. Para cada uno de los  $N$  subconjuntos que cumplen con la expresión (3.74), luego de haber calculado su respectiva matriz fundamental, y líneas epipolares respectivas, se calcula la mediana  $M_J$  considerando la totalidad de datos de entrada:

$$M_J = \underset{i=1, \dots, n}{\text{median}} \left[ d^2(\tilde{\mathbf{m}}'_i, \mathbf{l}'_i) + d^2(\tilde{\mathbf{m}}_i, \mathbf{l}_i) \right] \quad (3.77)$$

$d$  es la distancia entre el punto considerado y su respectiva línea epipolar. De todas estas  $N$  medianas, se elige la menor.

El umbral adaptivo  $\hat{\sigma}$  se encuentra en base a la siguiente expresión:

$$\hat{\sigma} = 1.4826 \left[ 1 + \frac{5}{n-p} \right] \sqrt{M_J} \quad (3.78)$$

donde  $n$  es el número de datos,  $p$  es la dimensión del vector,  $M_J$  es la menor mediana encontrada, este umbral servirá para descartar los outliers de la totalidad de datos de entrada según:

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{si } r_i^2 < (2.5\hat{\sigma})^2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.79)$$

donde  $r_i^2$  es:

$$r_i^2 = d^2(\tilde{\mathbf{m}}'_i, \mathbf{l}'_i) + d^2(\tilde{\mathbf{m}}_i, \mathbf{l}_i) \quad (3.80)$$

La matriz fundamental buscada se calcula como un problema de mínimos cuadrados ponderados, al minimizar:

$$\min \sum_i w_i r_i^2 \quad (3.81)$$

### 3.2.6 CONSIDERACIONES EN LA DETERMINACIÓN DE LA MATRIZ FUNDAMENTAL.

Antes de determinar la matriz fundamental, los datos de entrada deben acondicionarse, y tomarse en cuenta algunas de sus propiedades.

#### 3.2.6.1 NORMALIZACIÓN DE LOS DATOS DE ENTRADA.

Considerando una imagen de  $768 \times 576$  píxeles y si se observa la expresión (3.56), existen términos que son producto de dos coordenadas que pueden estar en el orden del valor 331,776, términos del orden de 576, y el último término valor uno, es decir se tienen términos que son numéricamente mucho menor que otros y afectarán la correcta estimación de la matriz fundamental, por lo que Hartley [67] propuso una normalización de los datos de entrada basada en un cambio de coordenadas de tal manera que los datos adyacentes sean de la misma magnitud. La normalización de los datos de entrada se realiza a través de una transformación  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{T}'$  (para los datos de la primera y segunda imagen respectivamente) de tal manera que se realice una traslación y un escalado que cumpla con:

- El centroide de los puntos transformados estén en el origen  $[0,0,1]^T$  (traslación).
- La distancia promedio de los puntos transformados al nuevo origen sea  $\sqrt{2}$  (escalado).
- Esta transformación es aplicada a cada una de las imágenes independientemente.

Por lo que los nuevos datos de entrada (normalizados) serán:

$$\tilde{\mathbf{m}}_i^* = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{m}}_i \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{m}}_i'^* = \mathbf{T}'\tilde{\mathbf{m}}_i' \quad (3.82)$$

con estos datos de entrada se encuentra una matriz fundamental intermedia  $\mathbf{F}^*$ . Para hallar la matriz fundamental que dependa de los datos originales, es necesario hacer una denormalización con la siguiente expresión:

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}'^T \mathbf{F}^* \mathbf{T} \quad (3.83)$$

que resulta de reemplazar en (3.33), las relaciones (3.82).

Se hace notar que el escalamiento aplicado es de tipo isotrópico, donde el origen de coordenadas es llevado a la posición del centroide de los puntos en consideración y se escala cada punto de tal manera que su distancia al origen sea  $\sqrt{2}$ . Hartley [67], también propone un escalado no isotrópico, que es llevado a cabo de tal manera que los dos momentos principales del conjunto de puntos sean igual a la unidad, así el conjunto de puntos formarán aproximadamente una nube circular de puntos de radio unidad alrededor del origen.

### 3.2.6.2 RESTRICCIÓN DE SINGULARIDAD.

Si la matriz fundamental fuera no singular, la consecuencia sería que los epipolos para cada línea epipolar no serían coincidentes (pues sólo hay un epipolo por cada imagen). La idea es forzar a que la matriz fundamental  $\mathbf{F}$  encontrada sea singular, es decir que cumpla con la restricción que sea de rango 2. Para eso, se reemplazará por una matriz fundamental  $\mathbf{F}'$  que minimice la norma de Frobenius (norma euclidiana)  $\|\mathbf{F} - \mathbf{F}'\|$  sujeta a la condición  $\det(\mathbf{F}') = 0$ . Para realizar esto también se aplican las propiedades de la descomposición SVD, hallándose la descomposición SVD de  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{USV}^T \quad (3.84)$$

donde  $\mathbf{S}$  es la matriz diagonal

$$\mathbf{S} = \text{diag}(r, s, t) \quad (3.85)$$

de tal manera que  $r \geq s \geq t$ . Por lo que simplemente se elige

$$\mathbf{F}' = \mathbf{U} \text{diag}(r, s, 0) \mathbf{V}^T \quad (3.86)$$

### 3.2.7 HOMOGRAFIA ENTRE DOS VISTAS.

Una homografía es una transformación proyectiva entre dos planos (Figura 3.9), donde cualquier punto  $\tilde{\mathbf{m}}_k$  perteneciente al plano  $\pi_k$  está relacionado linealmente con su respectivo punto  $\tilde{\mathbf{m}}_i$  perteneciente al plano  $\pi_i$  por la homografía  $\mathbf{H}_{ik}$  de la forma:

$$\lambda \tilde{\mathbf{m}}_i = \mathbf{H}_{ik} \tilde{\mathbf{m}}_k \quad (3.87)$$

La homografía  $\mathbf{H}_{ik}$  está representada por una matriz  $3 \times 3$  definida hasta un factor de escala (matriz de 8 grados de libertad),  $\lambda$  es una constante que representa la naturaleza proyectiva de la transformación.

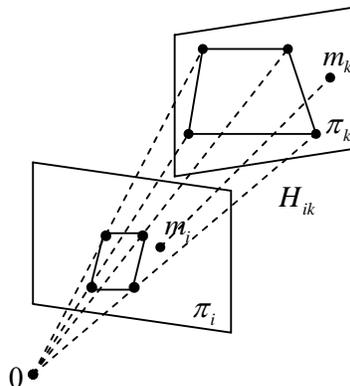


Figura 3.9.- Transformación proyectiva  $\mathbf{H}_{ik}$  entre los planos  $\pi_k$  y  $\pi_i$



$$\mathbf{H}_{21} = \mathbf{R}_{21} + \frac{\mathbf{t}_{21}}{d_1} \mathbf{n}_1^T \quad (3.93)$$

Al expresarse  $\mathbf{H}_{21}$  en valores métricos, es requisito de que esta homografía esté expresada en función de coordenadas centrales de la imagen representadas por las coordenadas normalizadas (homografía euclidiana). Si la homografía fue estimada a partir de coordenadas en píxeles (homografía proyectiva  $\mathbf{G}_{21}$ ), deberá hacerse una transformación de  $\mathbf{G}_{21}$  a  $\mathbf{H}_{21}$  [117]. La expresión para la homografía proyectiva es:

$$\lambda \tilde{\mathbf{m}}_2 = \mathbf{G}_{21} \tilde{\mathbf{m}}_1 \quad (3.94)$$

donde  $\tilde{\mathbf{m}}_1, \tilde{\mathbf{m}}_2$  están expresadas en píxeles. Si representamos (3.94) en coordenadas normalizadas (3.7), se tiene:

$$\lambda \tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{G}_{21} \mathbf{K}_1 \tilde{\mathbf{q}}_1 \quad (3.95)$$

donde  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$  son las matrices de parámetros intrínsecos de las cámaras izquierda y derecha respectivamente, entonces:

$$\lambda \tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{H}_{21} \tilde{\mathbf{q}}_1 \quad (3.96)$$

siendo  $\tilde{\mathbf{q}}_1, \tilde{\mathbf{q}}_2$  coordenadas normalizadas. A partir de (3.95) y (3.96) se ve que la homografía euclidiana  $\mathbf{H}_{21}$  está relacionada con la homografía proyectiva  $\mathbf{G}_{21}$  por:

$$\mathbf{H}_{21} = \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{G}_{21} \mathbf{K}_1 \quad (3.97)$$

Es relativamente fácil deducir la expresión (3.93) a partir de la transformación rígida entre el sistema de la primera cámara con respecto a la segunda, y las propiedades de la distancia del origen del sistema de la primera cámara al plano  $\pi$ . Si se tiene un punto  $\mathbf{M}$  que pertenece al plano  $\pi$ , consideramos como  $\mathbf{p}_1$  la posición de  $\mathbf{M}$  con respecto al sistema de coordenadas de la primera cámara, y la expresamos con referencia al sistema de coordenadas de la segunda cámara:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{R}_{21} \mathbf{p}_1 + \mathbf{t}_{21} \quad (3.98)$$

donde  $\mathbf{R}_{21}$  y  $\mathbf{t}_{21}$  son la rotación y traslación del sistema de coordenadas de la primera cámara con respecto a la segunda cámara;  $d_1$  es la distancia del origen del sistema de referencia de la primera cámara al plano  $\pi$ , y además es la proyección de  $\mathbf{p}_1$  sobre el vector  $\mathbf{n}_1$  que es la normal al plano  $\pi$  a partir del origen  $0_1$ :

$$d_1 = \mathbf{n}_1^T \mathbf{p}_1 \quad \text{ó} \quad 1 = \frac{\mathbf{n}_1^T \mathbf{p}_1}{d_1} \quad (3.99)$$

reemplazando (3.99) en (3.98) y factorizando  $\mathbf{p}_1$ :

$$\mathbf{p}_2 = \left( \mathbf{R}_{21} + \frac{\mathbf{t}_{21}\mathbf{n}_1^T}{d_1} \right) \mathbf{p}_1 \quad \text{ó} \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{H}_{21}\mathbf{p}_1 \quad (3.100)$$

se consigue la relación (3.93). Reescribiendo (3.100) como:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_{21} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

expresando en coordenadas normalizadas:

$$\tilde{\mathbf{q}}_1 = \frac{1}{Z_1} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{q}}_2 = \frac{1}{Z_2} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

se obtiene la relación (3.96), donde  $\lambda = Z_2 / Z_1$ .

El método para recuperar  $\mathbf{R}_{21}$ ,  $\mathbf{t}_{21}/d_1$ , y  $\mathbf{n}_1$  a partir de  $\mathbf{H}_{21}$  es denominado de descomposición [52] [196] [109]. Como  $\mathbf{t}_{21}$  está dividido por  $d_1$ , significa que se obtiene solamente la dirección de traslación. Una de las aplicaciones de la descomposición es la reconstrucción a partir de objetos planos.

Si el sistema utiliza un par estereoscópico de cámaras fijas, en otra posición y orientación del plano  $\pi$  se recupera la misma rotación  $\mathbf{R}_{21}$ , otra orientación  $\mathbf{n}_1$  y distancia  $d_1$ , y la misma traslación  $\mathbf{t}_{21}$  pero dividida por la nueva distancia  $d_1$ . Además por las experiencias realizadas y según algunos autores [119][196], para recuperar  $\mathbf{R}_{21}$  y  $\mathbf{t}_{21}$  adecuadamente, la homografía debe calcularse al menos a partir de entre 12 y 16 puntos pertenecientes al plano espacial; aunque esto depende de la precisión en la detección de las características de la imagen y del nivel de ruido presente en la escena.

### 3.2.8 RELACION ENTRE HOMOGRAFIAS Y LA MATRIZ FUNDAMENTAL.

Las proyecciones en ambas imágenes de los puntos 3D  $\mathbf{M}_\pi$  que están en el plano  $\pi$  que generan la homografía  $\mathbf{H}$  además cumplen con la restricción epipolar, entonces se puede encontrar una relación entre la matriz fundamental  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{H}$ . Consideremos un punto  $\tilde{\mathbf{m}}$  perteneciente a la primera imagen, la homografía  $\mathbf{H}$  permite encontrar la proyección de  $\mathbf{M}_\pi$  en la segunda imagen  $\tilde{\mathbf{m}}'$ . Además  $\tilde{\mathbf{m}}$  y  $\tilde{\mathbf{m}}'$  están en correspondencia, por lo tanto cumplen con la ecuación de restricción epipolar:

$$\tilde{\mathbf{m}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}} = (\mathbf{H} \tilde{\mathbf{m}})^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}} = \tilde{\mathbf{m}}'^T \mathbf{H}^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}} = 0 \quad (3.103)$$

esta expresión es satisfecha por cualquier punto  $\tilde{\mathbf{m}}$ , de donde se concluye que  $\mathbf{H}^T \mathbf{F}$  es una matriz antisimétrica, que cumple:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (3.104)$$

Multiplicando (3.104) por el epipolo  $\tilde{\mathbf{e}}$  y ordenando se tiene:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{e}} = -\mathbf{F}^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{e}}$$

se observa que esta expresión es igual a cero, pues de (3.35)  $\mathbf{F} \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$  (espacio nulo derecho de  $\mathbf{F}$ ). A partir de su segundo miembro y considerando  $\mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{e}}' = \mathbf{0}$  (espacio nulo izquierdo de  $\mathbf{F}$ ) se tienen dos opciones:

$$\mathbf{H} \tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{e}}' \quad \text{y} \quad \mathbf{H} \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{0} \quad (3.105)$$

donde  $\mathbf{H} \tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{e}}'$  representa una homografía calculada en base a puntos de un plano en una posición general, y  $\mathbf{H} \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$  representa un caso degenerado, es decir cuando el plano pasa por el centro óptico de la cámara.

Multiplicando (3.104) por un punto  $\mathbf{m}$  de la primera cámara y ordenando,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}} &= -\mathbf{F}^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{m}} \\ \mathbf{H}^T \mathbf{l}' &= -\mathbf{F}^T \tilde{\mathbf{m}}' \end{aligned}$$

Se tiene un mapeo que realiza  $\mathbf{H}^T$  entre líneas epipolares de la segunda imagen a las de la primera imagen:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{l}' = \mathbf{l} \quad (3.106)$$

donde se ha considerado que  $-\mathbf{l} \cong \mathbf{l}$ .

También puede deducirse una expresión que relaciona la matriz fundamental con una homografía y el epipolo de la segunda imagen. La línea epipolar  $\mathbf{l}'$  en la segunda imagen puede ser expresada como el producto vectorial de  $\tilde{\mathbf{e}}'$  y  $\tilde{\mathbf{m}}'$ , entonces:

$$\mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}} = \tilde{\mathbf{e}}' \times \tilde{\mathbf{m}}' \quad (3.107)$$

de (3.103) y considerando (3.107) se tiene:

$$(\mathbf{F} \tilde{\mathbf{m}})^T \mathbf{H} \tilde{\mathbf{m}} = \tilde{\mathbf{m}}'^T [\tilde{\mathbf{e}}']_{\times} \mathbf{H} \tilde{\mathbf{m}} = 0 \quad (3.108)$$

comparando (3.108) con la ecuación de restricción epipolar (3.33) se llega a

$$\mathbf{F} = [\tilde{\mathbf{e}}']_x \mathbf{H} \quad (3.109)$$

ecuación compatible con (3.104) y que además muestra una forma de calcular la matriz fundamental si se conoce una homografía y el epipolo de la segunda cámara que puede encontrarse en base a relaciones geométricas. Es el método denominado paralaje virtual [14] donde es necesario un plano  $\pi$ , una homografía  $\mathbf{H}$  calculada a través de los puntos de este plano, y dos puntos tridimensionales  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$  que no pertenezcan a este plano (Figura 3.11). Las proyecciones de los dos puntos virtuales  $\mathbf{M}_{1\pi}$  y  $\mathbf{M}_{2\pi}$  en la segunda imagen son

$$\tilde{\mathbf{m}}'_{1\pi} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{m}}_1 \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{m}}'_{2\pi} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{m}}_2 \quad (3.110)$$

las líneas  $\mathbf{l}'_1$  y  $\mathbf{l}'_2$  se pueden encontrar como el producto vectorial:

$$\mathbf{l}'_1 = \tilde{\mathbf{m}}'_{1\pi} \times \tilde{\mathbf{m}}'_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{l}'_2 = \tilde{\mathbf{m}}'_{2\pi} \times \tilde{\mathbf{m}}'_2 \quad (3.111)$$

Todas las líneas epipolares pasan por el epipolo de la imagen, en consecuencia el epipolo buscado será la intersección de ambas líneas epipolares:

$$\tilde{\mathbf{e}}' = \mathbf{l}'_1 \times \mathbf{l}'_2 \quad (3.112)$$

y la matriz fundamental  $\mathbf{F}$  puede encontrarse utilizando la ecuación (3.109).

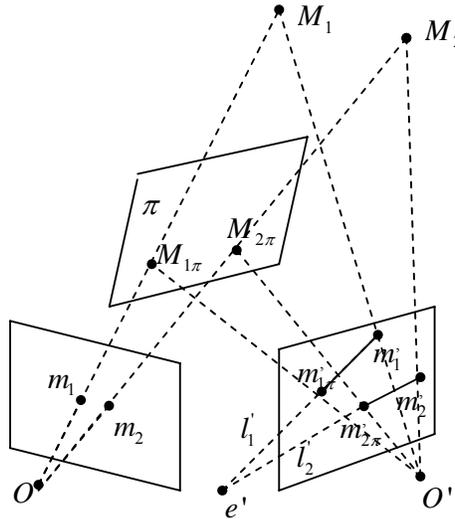


Figura 3.11.- Cálculo del epipolo en la segunda imagen por el método de paralaje virtual.

Según este método el número mínimo para calcular la matriz fundamental  $\mathbf{F}$  son seis, de los cuales cuatro deben ser coplanares que servirán para calcular a priori la homografía  $\mathbf{H}$ . Una ventaja de este método es que asegura que el rango de la matriz fundamental sea dos, por cuanto que se la calcula en base a la matriz skew symmetric (matriz de rango dos) de  $\tilde{\mathbf{e}}$ .

### 3.2.9 CALIBRACIÓN DEL PAR ESTÉREO.

La calibración del par estéreo implica la determinación de la transformación rígida entre el sistema de coordenadas de la primera cámara y el sistema de la segunda cámara:  $\mathbf{R}_{21}$  y  $\mathbf{t}_{21}$ .

Para la configuración cámara fija utilizada, estas relaciones se pueden obtener a partir de las transformaciones (parámetros extrínsecos) entre el sistema del mundo y el sistema de cada cámara (Figura 3.12), según la expresión:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{21} & \mathbf{t}_{21} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2W} & \mathbf{t}_{2W} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1W} & \mathbf{t}_{1W} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.113)$$

donde  $\mathbf{R}_{1W}, \mathbf{t}_{1W}$  y  $\mathbf{R}_{2W}, \mathbf{t}_{2W}$  son las transformaciones entre el sistema del mundo y la primera y segunda cámara respectivamente.

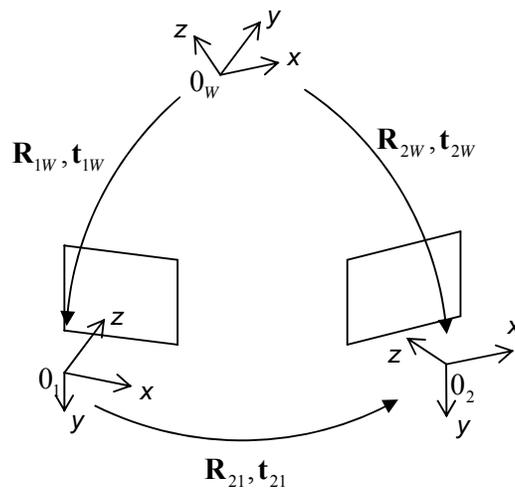


Figura 3.12.- Transformaciones entre el sistema del mundo y cada cámara.

### 3.2.10 RECONSTRUCCIÓN TRIDIMENSIONAL.

La reconstrucción tridimensional se lleva a cabo a través de un proceso de triangulación por el cual se encuentra un punto 3D a partir de sus proyecciones en la imagen de  $n$  cámaras, conocidas su calibración y la posición y orientación relativa entre ellas.

Se considera como datos de entrada:  $\mathbf{P}_i$  para  $i=1,\dots,n$  matrices de proyección de las  $n$  cámaras;  $\mathbf{m}_i$  para  $i=1,\dots,n$  puntos correspondidos en las  $n$  imágenes; la salida es el punto tridimensional  $\mathbf{M}$ . Existen un gran número de métodos para realizar la triangulación [68]: triangulación lineal, minimizar la distancia de los rayos reproyectados, encontrar el punto medio de la perpendicular común a los rayos reproyectados, métodos iterativos, etc., desarrollaremos el que se basa en minimizar la distancia entre los rayos reproyectados por ser éste el método utilizado en las tareas de reconstrucción 3D realizadas en la presente tesis.

#### 3.2.10.1 MINIMIZAR LA DISTANCIA DE LOS RAYOS REPROYECTADOS.

Un punto infinito  $(X, Y, Z)^T$  se proyecta en la imagen como:

$$\tilde{\mathbf{m}} \sim \mathbf{P} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \tilde{\mathbf{m}} \sim \mathbf{KR} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

donde  $\sim$  representa proporcionalidad,  $\mathbf{P}$  es la matriz de proyección (con matrices de rotación  $\mathbf{R}$  y vector de traslación  $\mathbf{t}$  del sistema del mundo al sistema de la cámara),  $\mathbf{K}$  matriz de parámetros intrínsecos, (3.114) puede reescribirse como:

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}^{-1}\tilde{\mathbf{m}} \sim \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

La proyección en la imagen de todos los puntos que se encuentran en su línea de mira es:

$$\tilde{\mathbf{m}} \sim \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{t} + \lambda \mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}^{-1}\tilde{\mathbf{m}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

donde  $\mathbf{t} + \lambda \mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}^{-1}\tilde{\mathbf{m}}$  es la ecuación de la línea de mira, y  $\lambda \in [0, \infty]$ .

Para  $n$  imágenes, el punto tridimensional  $\mathbf{M}$  buscado a partir de las proyecciones  $\mathbf{m}_i$ , ( $i=1,\dots,n$ ) para valores específicos de  $\lambda_i$  estará dado por:

$$\mathbf{M} = \mathbf{t}_i + \lambda_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{K}_i^{-1} \tilde{\mathbf{m}}_i \quad (3.117)$$

determinamos  $\mathbf{M}$  y  $\lambda_i$  de tal manera que se minimice la expresión (3.117), es decir:

$$\min \sum_{i=1}^n \left\| \mathbf{M} - \mathbf{t}_i - \lambda_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{K}_i^{-1} \tilde{\mathbf{m}}_i \right\|^2 \quad (3.118)$$

que puede resolverse por el método de mínimos cuadrados. Expresando (3.117) en matrices se obtiene un sistema de la forma  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{K}_1^{-1} \tilde{\mathbf{m}}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_3 & & -\mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{K}_2^{-1} \tilde{\mathbf{m}}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{K}_n^{-1} \tilde{\mathbf{m}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

donde  $\mathbf{I}_3$  es la matriz identidad de orden 3, las incógnitas a determinarse son  $\mathbf{M}$  y las  $\lambda_i$ .

Para el caso particular de un sistema de dos cámaras con transformación rígida  $\mathbf{R}_{21}$  y  $\mathbf{t}_{21}$  (Figura 3.13):

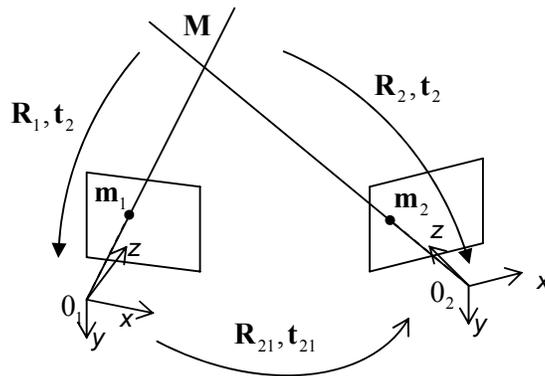


Figura 3.13.- Reconstrucción tridimensional del punto  $\mathbf{M}$  en un sistema de dos cámaras, minimizando la distancia de los rayos reproyectados.

las coordenadas tridimensionales  $(X, Y, Z)^T$  a determinarse están referidas al sistema de la primera cámara, por lo tanto  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{I}_3$  y  $\mathbf{t}_1 = \mathbf{0}$ . La rotación y traslación  $\mathbf{R}_2, \mathbf{t}_2$  para la proyección en la segunda cámara son iguales a  $\mathbf{R}_{21}$  y  $\mathbf{t}_{21}$  respectivamente, esto se comprueba si realizamos los productos en matrices homogéneas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{21} & \mathbf{t}_{21} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{21} & \mathbf{t}_{21} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

reemplazando en (3.119) para  $n = 2$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{K}_1^{-1}\tilde{\mathbf{m}}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{K}_2^{-1}\tilde{\mathbf{m}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

en este sistema de la forma  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A}$  es de dimensión  $6 \times 5$ ,  $\mathbf{x}$  de dimensión  $5 \times 1$ , y  $\mathbf{b}$  de dimensión  $6 \times 1$ . Se encuentran entonces  $\mathbf{M}$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

### 3.3 MODELO DEL ROBOT.

El robot utilizado es un sistema articular de tres grados de libertad, dos giratorios y uno de traslación (

Figura 3.17). El sistema de referencia general del robot se ha ubicado en el cruce de los ejes del primer y segundo eslabón del robot con la orientación que se muestra en la Figura 3.14, mientras que el sistema de referencia del extremo del robot, está ubicado en el origen de coordenadas del del último eslabón y que idealmente coincide con el punto central del patrón de cinco puntos.

Se ha aplicado el método de Denavit-Hartenberg para determinar su cinemática directa [10][166] y a través de ésta el jacobiano del robot aplicando las técnicas de la cinemática diferencial [166], que será utilizado posteriormente en el cálculo del jacobiano analítico de la imagen.

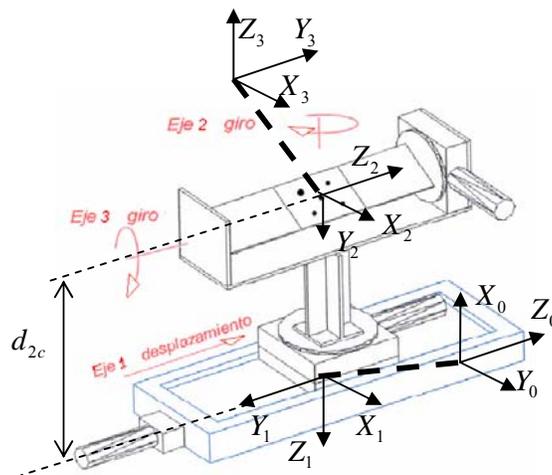


Figura 3.14.- Sistemas de referencia del robot para calcular la cinemática directa por el método de Denavit-Hartenberg

### 3.3.1 CÁLCULO DE LA CINEMÁTICA DIRECTA.

La cinemática directa establece la relación entre las articulaciones del robot y la orientación y posición del efector final del robot. Se ha aplicado el método de Denavit-Hartenberg, donde los sistemas de referencia para cada eslabón se muestran en la Figura 3.14, se supone que tanto los ejes de rotación de los eslabones 3 y 2 así como el eje de rotación del eslabón 2 y el eje del eslabón 1 se cortan en el espacio, además, que la plataforma del tercer eslabón descansa en el eje del mismo (caso ideal). Además para evitar que algunas medidas aumenten las posibles fuentes de errores, se ha considerado coincidentes en posición los sistemas de referencia 0 y 1, así también los sistemas 2 y 3. En base a esta configuración se han obtenido los parámetros de Denavit-Hartenberg que se muestran en la (Tabla 3.1), donde  $d_1, \theta_2, \theta_3$ , son variables y  $d_{2c}$  es constante.

Tabla 3.1.- Parámetros de Denavit-Hartenberg del robot.

Eslabón	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$
1	$90^\circ$	$-90^\circ$	0	$d_1$
2	$\theta_2$	$90^\circ$	0	$-d_{2c}$
3	$\theta_3$	$90^\circ$	0	0

Las matrices de transformación entre eslabones  $\mathbf{H}_{(i-1)i}$  se muestran a continuación:

$$\mathbf{H}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

$$\mathbf{H}_{12} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d_{2c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

$$\mathbf{H}_{23} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & 0 & -c\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

donde  $c\theta = \cos \theta$ , y  $s\theta = \sin \theta$ . La matriz de transformación entre el segundo eslabón y la referencia es:

$$\mathbf{H}_{02} = \mathbf{H}_{01}\mathbf{H}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & d_{2c} \\ c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

La matriz de transformación entre el último eslabón y el sistema de referencia es:

$$\mathbf{H}_{03} = \mathbf{H}_{01}\mathbf{H}_{12}\mathbf{H}_{23} = \begin{bmatrix} -s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & d_{2c} \\ c\theta_2 c\theta_3 & s\theta_2 & c\theta_2 s\theta_3 & 0 \\ -s\theta_2 c\theta_3 & c\theta_2 & -s\theta_2 s\theta_3 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

### 3.3.2 CÁLCULO DE LA CINEMÁTICA DIFERENCIAL.

Se determina la relación entre la velocidad espacial (lineal y angular) del efector final con las velocidades de las articulaciones del robot, esta relación está representada por el jacobiano del robot  $\mathbf{J}_R$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_R \dot{\mathbf{q}} \quad \text{donde} \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

el jacobiano del robot se calcula en base a relaciones entre posición y orientación de los puntos pertenecientes a un eslabón  $i$  y el eslabón anterior  $i-1$  [166]. El jacobiano del robot tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{J}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \\ 0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

donde  $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$  son vectores cuyos elementos son los elementos de la tercera columna de la matriz de rotación entre el eslabón 0,1 y 2 con respecto a la referencia respectivamente:

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

y  $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  son vectores de posición iguales a los vectores de traslación entre el último eslabón, el eslabón 1 y el eslabón 2 con respecto a la referencia respectivamente:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} d_{2c} \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} d_{2c} \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

Realizando los productos vectoriales indicados en (3.127) se llega al jacobiano del robot buscado:

$$\mathbf{J}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

### 3.3.3 CASO DE EJES DE ROTACIÓN QUE NO SE CORTAN.

En este caso se considera que el eje de rotación del segundo eslabón (eje Z del sistema del primer eslabón) no se corta en el espacio con el eje de rotación del tercer eslabón (eje Y del sistema del tercer eslabón), existiendo un desplazamiento  $a_{2c}$  (Figura 3.15), que deberá considerarse en los parámetros de Denavit-Hartenberg los cuales se muestran en la Tabla 3.2.

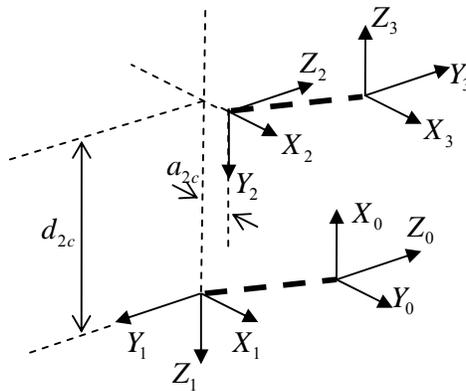


Figura 3.15.- Sistemas de referencia del robot para calcular la cinemática directa por el método de Denavit-Hartenberg, considerando el desplazamiento entre los ejes de rotación del segundo y tercer eslabón.

Tabla 3.2.- Parámetros de Denavit-Hartenberg del robot considerando el desplazamiento  $a_{2c}$  entre los ejes de rotación del segundo y tercer eslabón.

Eslabón	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$
1	$90^\circ$	$-90^\circ$	0	$d_1$
2	$\theta_2$	$90^\circ$	$a_{2c}$	$d_{2c}$
3	$\theta_3$	$90^\circ$	0	0

Las nuevas matrices de transformación entre eslabones son:

$$\mathbf{H}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

$$\mathbf{H}_{12} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & a_{2c}c\theta_2 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & a_{2c}s\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & -d_{2c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

$$\mathbf{H}_{23} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & 0 & -c\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

$$\mathbf{H}_{02} = \mathbf{H}_{01}\mathbf{H}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & d_{2c} \\ c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & a_{2c}c\theta_2 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 & -a_{2c}s\theta_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

$$\mathbf{H}_{03} = \begin{bmatrix} -s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & d_{2c} \\ c\theta_2c\theta_3 & s\theta_2 & c\theta_2s\theta_3 & a_{2c}c\theta_2 \\ -s\theta_2c\theta_3 & c\theta_2 & -s\theta_2s\theta_3 & -a_{2c}s\theta_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

### 3.3.4 CÁLCULO DE LA CINEMÁTICA DIFERENCIAL PARA EL CASO DE EJES NO ALINEADOS.

El jacobiano del robot mantiene la forma de la ecuación (3.127), los vectores de rotación  $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$  son los mismos. Los nuevos vectores de posición  $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  son:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} d_{2c} \\ a_{2c} c\theta_2 \\ -a_{2c} s\theta_2 + d_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

realizando los productos vectoriales indicados y simplificando se tiene el jacobiano del robot:

$$\mathbf{J}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{2c} s\theta_2 & 0 \\ 1 & -a_{2c} c\theta_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s\theta_2 \\ 0 & 0 & c\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

## 3.4 RESULTADOS EXPERIMENTALES.

### 3.4.1 ENTORNO DE PRUEBAS.

El entorno de pruebas utilizado es un sistema de hardware y software, los cuales se describen a continuación.

#### 3.4.1.1 HARDWARE.

Está conformado por un sistema articular compuesto por un controlador y una plataforma de tres grados de libertad, un ordenador Pentium IV de 2.8 GHz que se comunica con el controlador por el puerto serie con protocolo RS-232C, dos cámaras fijas CCD analógicas (par estereoscópico) de ejes convergentes y un sistema de adquisición de imágenes compuesto por una tarjeta Matrox Meteor II (Figura 3.16). El detalle de los mismos se muestra a continuación:



Figura 3.16.- Entorno de pruebas.

- **Cámaras**, cámaras CCD marca Phoenix Imaging modelo CV-M50 con características:
  - Sensor CCD formato  $\frac{1}{2}$ " , transferencia entrelineado.
  - Imagen de 768H por 576V.
  - Sincronismo interno y externo.
  - Escaneado entrelazado y no entrelazado.
  - Iluminación máxima y mínima: 500-0.5 lux.
  - Relación S/N: mayor que 58 dB.
  - Alimentación y consumo de potencia: 12V DC, 2.5W.
  - Temperatura de operación: entre -10°C y +50°C.
- **Tarjeta de adquisición de imágenes**, modelo Meteor II-MC/4 de Matrox, sus principales características son:
  - Digitalizador color/monocromo para bus PCI.
  - Captura de vídeo estándar o no estándar hasta 30 MHz.
  - Doble buffering: permite capturar una imagen mientras se procesa la previamente grabada.
- **Sistema articular**, es una plataforma de tres grados de libertad (
- Figura 3.17), controlado por un sistema de posicionamiento marca Newport, modelo MM3000 (Figura 3.18). Los grados de libertad son: uno de desplazamiento (primera articulación) y dos de giro (segunda y tercera articulación). Es un sistema cerrado,

por lo que no devuelve el control hasta que ha alcanzado la referencia que se le haya dado previamente y no se puede cambiar la referencia de posición mientras el robot está en movimiento. La precisión del sistema es de milésimas de milímetro. para la 1ra. articulación y de milésimas de grado para la 2da. y 3ra. articulación.

•

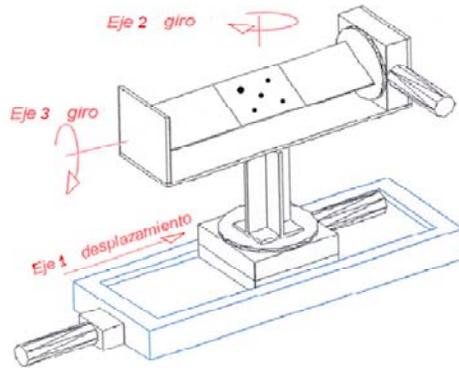


Figura 3.17.- Esquema del sistema articular.



Figura 3.18.- Controlador del sistema articular.

### 3.4.1.2 SOFTWARE.

Como lenguaje de programación se ha escogido C++. El entorno de desarrollo elegido ha sido Microsoft Visual C++ versión 6.0 en Windows XP. Se utilizan librerías de procesamiento de imágenes que agilizan el desarrollo de los programas. Se han utilizado librerías Matrox Imaging Library Lite (MIL Lite) e Intel Open Source Computer Vision Library (OpenCV).

- **Librería MIL Lite**, presenta un conjunto muy extenso de funciones para procesar imágenes y funciones especializadas en reconocimiento de patrones, obtención de medidas y análisis de formas. En general, MIL Lite permite manipular imágenes tanto binarias como en escala de grises o en color. El paquete de funciones ha sido diseñado para aplicaciones de altas prestaciones en velocidad, así como para ser fácilmente utilizable. Es una librería disponible para el lenguaje C y sobre distintas plataformas de Windows (NT/95/98/2000/XP).
- **Librería OpenCV**, la librería OpenCV de INTEL es una librería de código abierto con cientos de funciones en lenguaje C, que implementan los principales algoritmos de procesamiento de imágenes y visión por computador. Se pueden utilizar las funciones independientemente o como parte de una interfaz de programación de aplicaciones. Existen versiones tanto para Windows como para Linux.

### 3.4.1.3 CARACTERÍSTICAS VISUALES.

A fin de conseguir mayor exactitud en los algoritmos a ser implementados, las características visuales se detectan a nivel subpixel [153] a partir de un patrón unido al último eslabón del sistema articular. Para sistematizar los experimentos, se ha utilizado un patrón diferente según la tarea a realizar, que a continuación se describen:

- Patrón compuesto por 25 cuadrados negros sobre fondo blanco plano (Figura 3.19). Se ha utilizado en tareas de calibración y en tareas de estimación de la matriz fundamental. Las características a detectarse son las coordenadas  $(x, y)$  de las esquinas (un total de 100) de cada uno de estos cuadrados. El método de detección de esquinas empleado es el método de Harris con ajuste subpixel basado en el cambio de la dirección del gradiente (implementación con OpenCV).

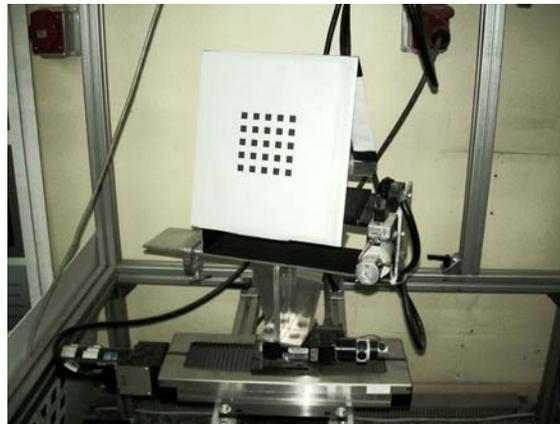


Figura 3.19.- Sistema articular con patrón de calibración.

- Patrón de cinco puntos negros sobre fondo blanco plano (Figura 3.20), las características a extraer son las coordenadas  $(x, y)$  del centro de gravedad de cada

uno de estos puntos (por lo que se puede considerar hasta diez características visuales) con precisión subpixel. Cada uno de ellos es reconocido y etiquetado por su posición y orientación en cada movimiento, se define así la localización del objeto en la imagen de manera única.



Figura 3.20.- Sistema articular con patrón de cinco puntos.

La numeración de cada uno de los puntos se muestra en la (Figura 3.21), el primero de ellos con un diámetro superior al resto para facilitar la identificación y etiquetado de los puntos.

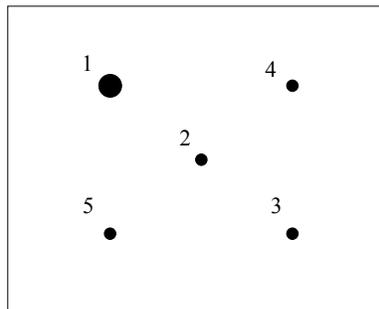


Figura 3.21.- Patrón de cinco puntos y su numeración.

- Patrón negro de forma triangular sobre fondo blanco plano (Figura 3.22), las características a extraer son los bordes de este triángulo que representarán líneas en posición general sobre el plano. Patrón que se utilizará en tareas de control visual a partir de líneas (capítulo 7). El método de detección de líneas utilizado es el de supresión de no máximos.

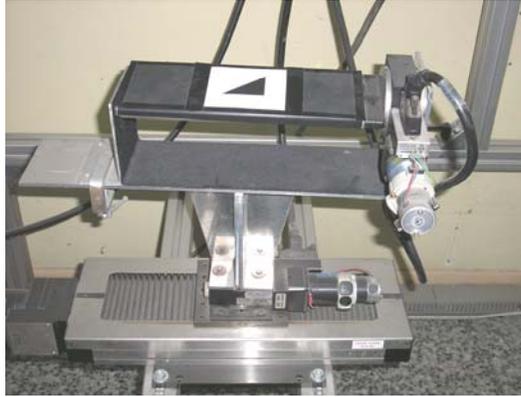


Figura 3.22.- Sistema articular con patrón triangular .

En esta primera parte de los experimentos, se han implementado diferentes métodos de estimación de la matriz fundamental. Las pruebas se han realizado sin ruido añadido así como con ruido añadido tanto aleatorio como gaussiano, a fin de elegir el más adecuado para la implementación de uno de los algoritmos propuestos para la estimación del jacobiano de la imagen, el cual incorpora la geometría epipolar como se verá en el siguiente capítulo.

Se complementan las anteriores pruebas con otras que consideran la calibración de las cámaras a fin de recuperar la transformación entre los sistemas de ambas cámaras a partir de la matriz fundamental y de homografías.

También se describen los pasos seguidos para determinar la separación de los eje de rotación del segundo y tercer eslabón para ser considerado en el modelo cinemático del robot. Se han aplicado técnicas de reconstrucción 3D para determinar la posición de cada uno de los puntos del patrón en el espacio de trabajo.

### **3.4.2 ESTIMACION DE LA MATRIZ FUNDAMENTAL.**

Los datos de entrada son la correspondencia de las esquinas de las imágenes izquierda y derecha (Figura 3.23) del patrón de calibración (25 cuadrados negros sobre fondo blanco), como no siempre se visualizan todas las esquinas, es común detectar menos de la totalidad de esquinas. Puesto que el número mínimo de posiciones y orientaciones del patrón para la estimación de la matriz fundamental es de dos, las pruebas se han realizado con imágenes del patrón pertenecientes desde dos a cinco diferentes posiciones y orientaciones del patrón en el espacio de trabajo.

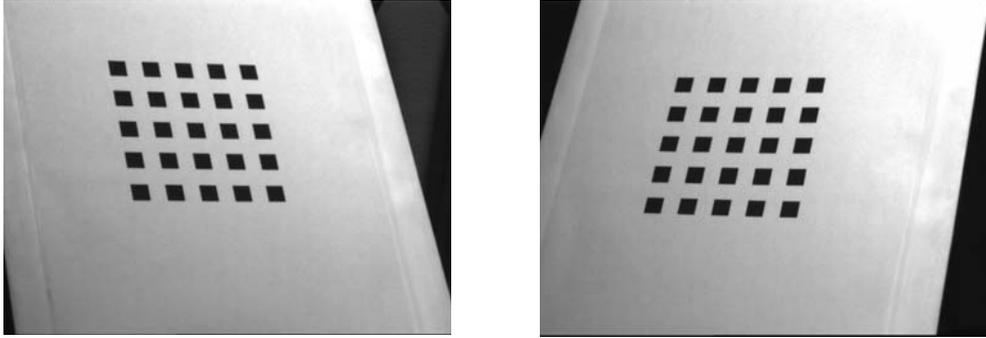


Figura 3.23.- Imágenes izquierda y derecha del patrón de calibración.

Se comparan los principales métodos de estimación de la matriz fundamental cuya nomenclatura se muestra en la Tabla 3.3. Los resultados de la estimación de la matriz fundamental se muestran en gráficos cuyos ejes son error VS número de puntos. Se analiza el comportamiento de cada uno de los métodos implementados frente al ruido aleatorio y gaussiano. Los criterios de evaluación son el error medio y el error máximo, los cuales son calculados a partir de la ecuación de restricción epipolar (3.33).

Tabla 3.3.- Nomenclatura de los métodos implementados en la estimación de la matriz fundamental.

METODO	DESCRIPCIÓN
SVD	Método de descomposición singular con Normalización de datos de entrada.
LLST	Método de mínimos cuadrados.
NL	Método no lineal.
RANSAC	Método RANSAC.
LMedS	Método LMedS.

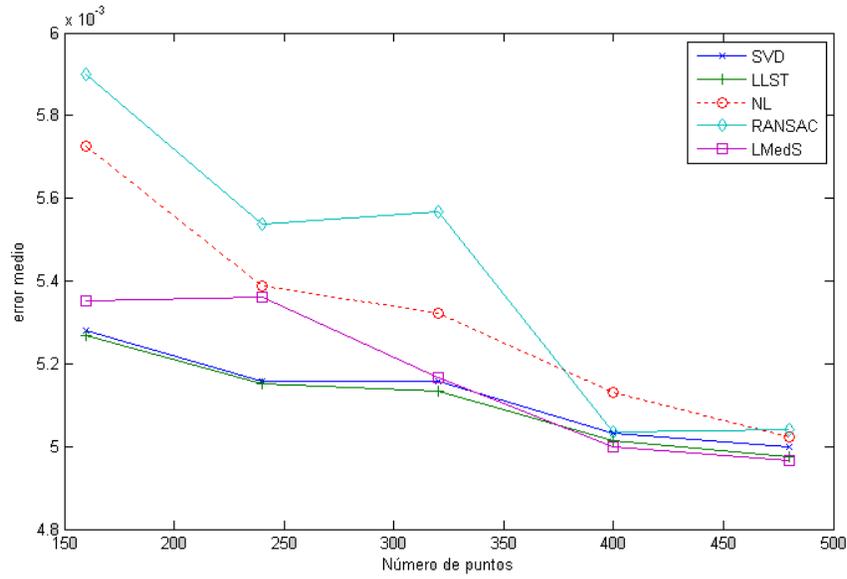


Figura 3.24.- Error medio VS número de puntos.

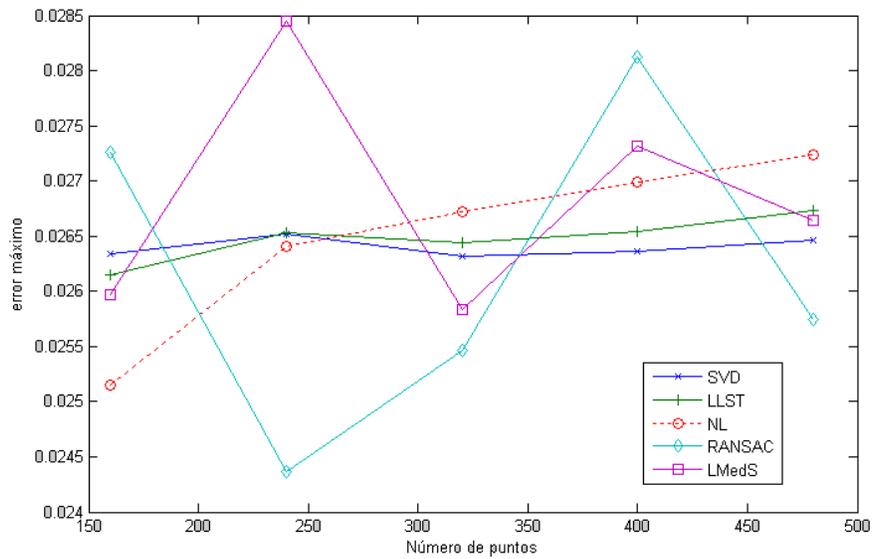


Figura 3.25.- Error máximo VS número de puntos.

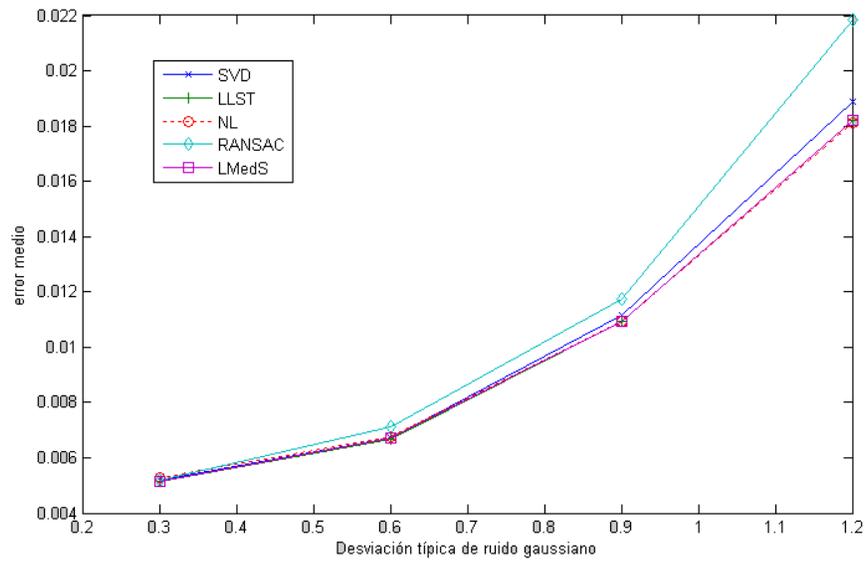


Figura 3.26.- Error medio VS ruido gaussiano.

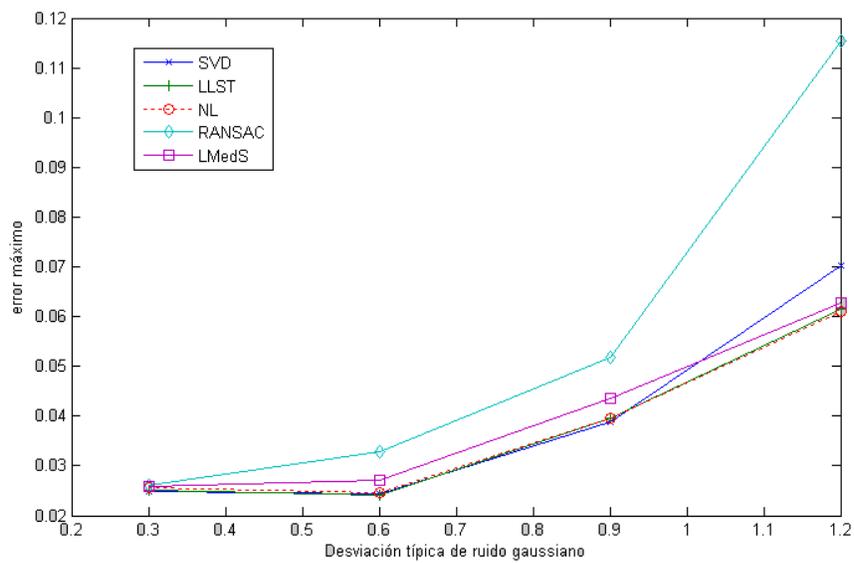


Figura 3.27.- Error máximo VS ruido gaussiano.

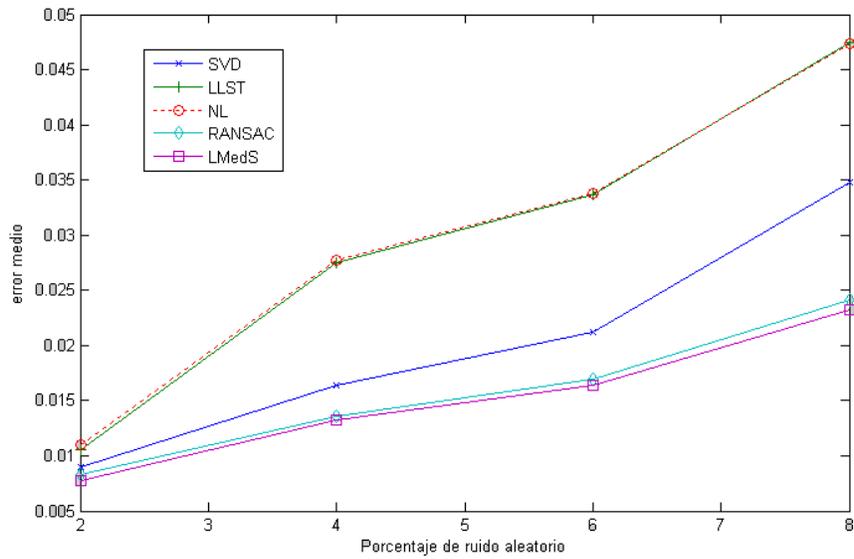


Figura 3.28.- Error medio VS ruido aleatorio.

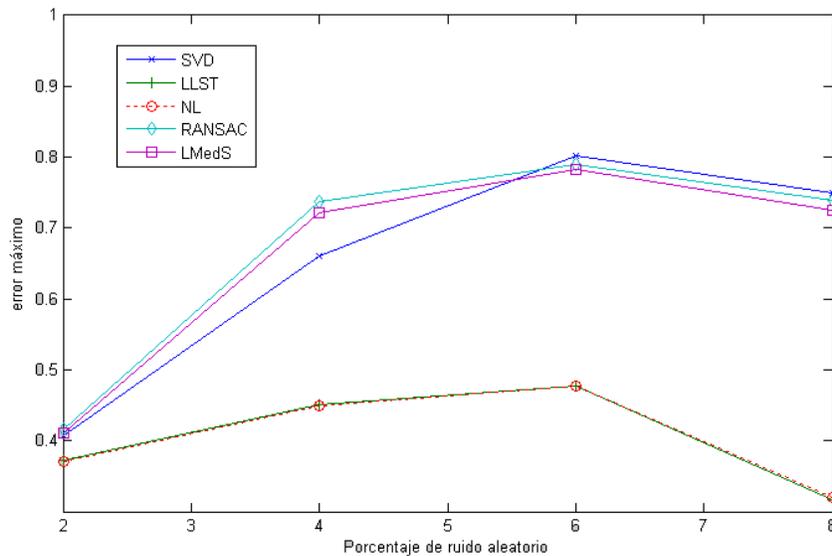


Figura 3.29.- Error máximo VS ruido aleatorio.

Se observa a partir de la Figura 3.24, que en todos los métodos, el error medio disminuye con el número de puntos, hasta llegar a un número de puntos de convergencia cercano a 480. Los métodos lineales siguen un comportamiento casi lineal de error máximo VS número de puntos, este comportamiento no se observa en los métodos robustos.

En las Figura 3.26 y Figura 3.27 se observa que dentro de los límites encontrados experimentalmente (hasta un valor de  $\sigma=1.2$ , aunque el método SVD soporta hasta  $\sigma=1.5$ ) tanto el error medio y máximo se incrementan con el ruido gaussiano.

obteniéndose buenos resultados en error medio los métodos NL, LMedS y LLST, mientras que en error máximo RANSAC, LMedS y SVD.

Para las pruebas con ruido aleatorio también se ha establecido experimentalmente un valor máximo de hasta 8% (aunque los métodos robustos soportan valores mucho mayores), a partir de las figuras Figura 3.28 y Figura 3.29, se observa que en error medio los métodos robustos se comportan mejor, seguidos del método SVD; en error máximo SVD tiene un comportamiento ligeramente mejor que los métodos robustos.

### 3.4.3 RECUPERACIÓN DE LA ROTACIÓN Y LA TRASLACIÓN A PARTIR DE LA MATRIZ FUNDAMENTAL:

A partir de la matriz fundamental calculada y conociendo la calibración de las cámaras, se ha recuperado tanto la rotación  $\mathbf{R}$  y la traslación  $\mathbf{t}$  escalada [66] entre ambas cámaras, se ha comprobado su validez en base a una reconstrucción tridimensional [68] del patrón de calibración en tres posiciones diferentes en el espacio (Figura 3.30 y Figura 3.31). El método de reconstrucción tridimensional utilizado es el de minimizar la distancia de los rayos re proyectados (ver apartado 3.2.10.1), el resultado se compara con los obtenidos en la reconstrucción tridimensional utilizando las las matrices de proyección verdaderas  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  (Figura 3.32).

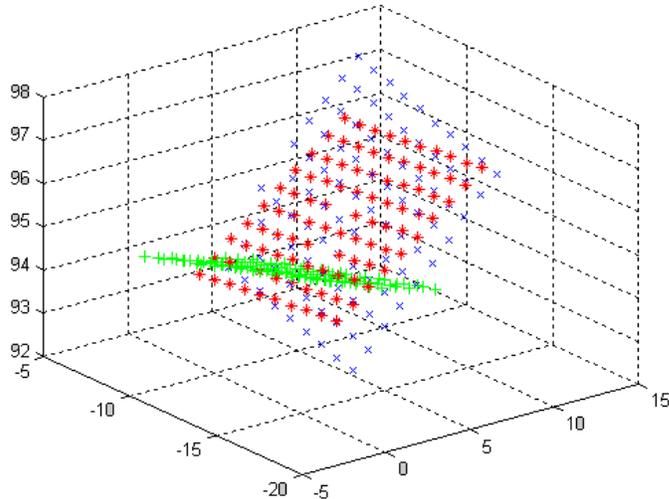


Figura 3.30.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, basada en  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$  escalada recuperadas a partir de la matriz fundamental,  $\mathbf{t}$  escalada por 2.

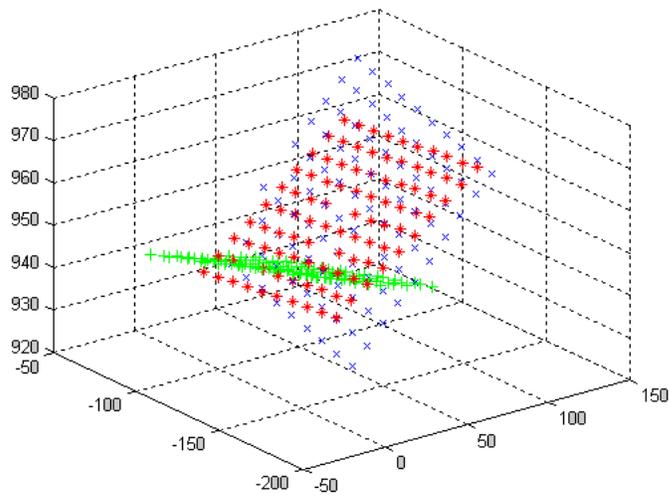


Figura 3.31.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, basada en  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$  escalada recuperadas a partir de la matriz fundamental,  $\mathbf{t}$  escalada por 20.

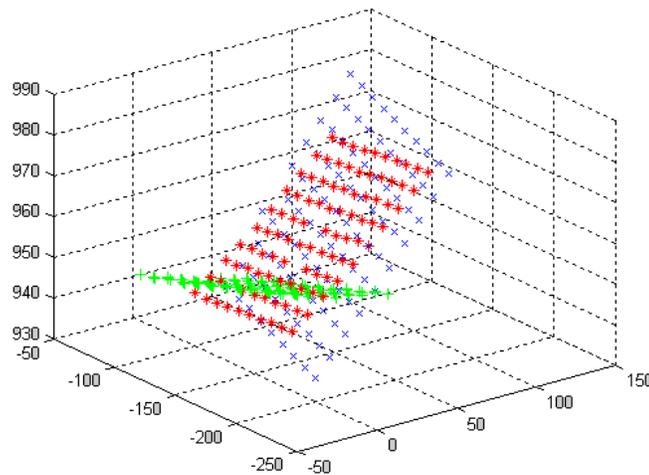


Figura 3.32.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, a partir de  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$  verdaderas.

### 3.4.4 RECUPERACIÓN DE LA ROTACIÓN, TRASLACIÓN Y ORIENTACIÓN A PARTIR DE HOMOGRAFÍAS.

Según el método de descomposición de Faugeras y Lustman [52] se recupera la rotación  $\mathbf{R}$  y la traslación  $\mathbf{t}$  (escalada) entre ambas cámaras a partir de la homografía calculada con los puntos de las imágenes del patrón. Con la  $\mathbf{R}$  y la  $\mathbf{t}$  (escalada) recuperadas, se reconstruye el plano en el espacio 3D. Se reconstruye tres posiciones diferentes del

patrón en el espacio de trabajo. Se ha considerado recuperar  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$  (escalada) a partir ya sea de la homografía  $\mathbf{H}_1$  (Figura 3.33 y Figura 3.34), ó a partir de  $\mathbf{H}_2$  (Figura 3.35 y Figura 3.36) estimadas cada una en una posición diferente del patrón de calibración en el espacio de trabajo. Estas homografías se han estimado con 16 esquinas del patrón de calibración, que según pruebas realizadas previamente son suficientes para tener una buena estimación de la homografía. Se hace notar que se han estimado más homografías  $\mathbf{H}$  a partir otras posiciones del patrón en el espacio de trabajo, y al recuperar  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$  se obtienen resultados similares.

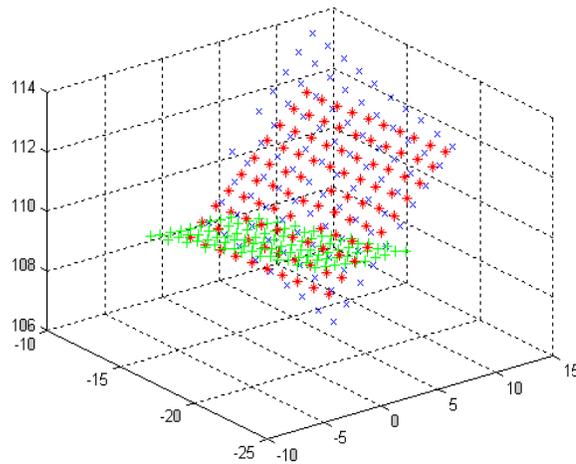


Figura 3.33.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, basada en  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$  escalada recuperadas a partir de  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{t}$  escalada por 100

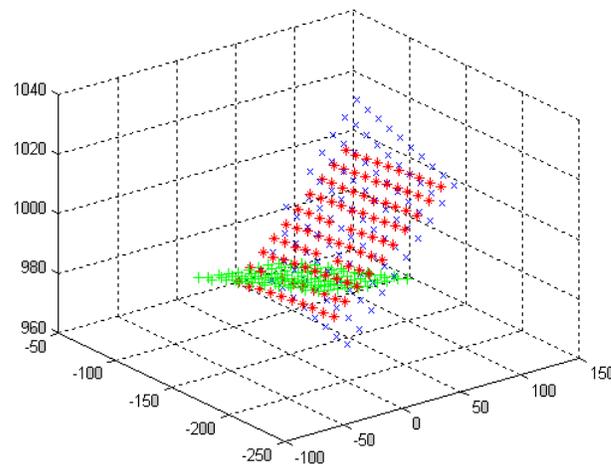


Figura 3.34.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, basada en  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$  escalada recuperadas a partir de  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{t}$  escalada por 900

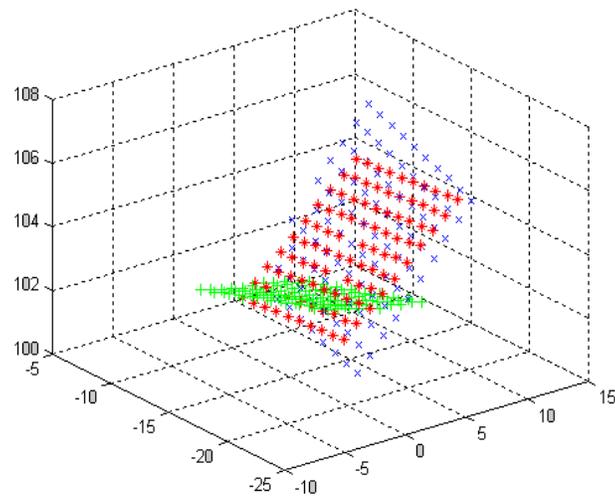


Figura 3.35.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, basada en  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$  escalada recuperadas a partir de  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{t}$  escalada por 100.

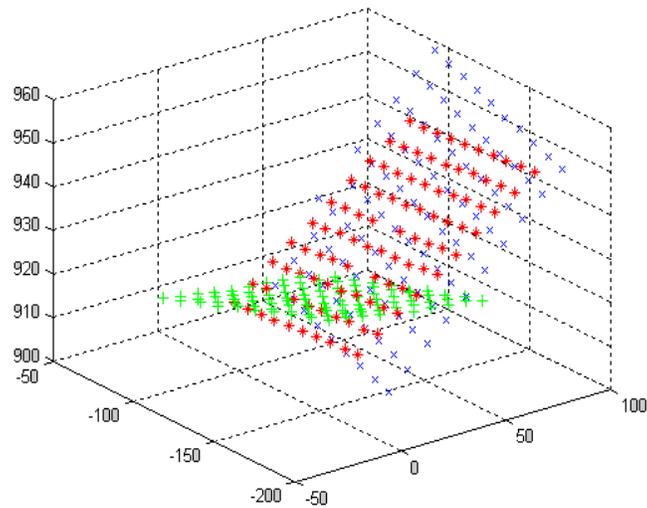


Figura 3.36.- Reconstrucción tridimensional de las esquinas del patrón de calibración en tres posiciones diferentes, basada en  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$  escalada recuperadas a partir de  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{t}$  escalada por 900.

### 3.4.5 DETERMINACIÓN DE LA SEPARACIÓN ENTRE LOS EJES DE ROTACION DEL SISTEMA ARTICULAR MEDIANTE VISIÓN.

En estos experimentos se trabaja con el patrón de cinco puntos negros sobre el plano blanco (Figura 3.20). Antes de aplicar el modelo cinemático del robot, se debe considerar dos cuestiones importantes:

- Si los ejes de giro de los eslabones dos y tres se cortan en el espacio, de no ser así, la distancia entre ejes deberá ser considerada en el modelo del robot (Figura 3.15).
- Si el origen del sistema de coordenadas del mundo (tercer eslabón del sistema articular), coincide con el centro de gravedad del punto central del patrón de cinco puntos (Figura 6.7). De no ser así, deberá obtenerse la ubicación de cada uno de los puntos en este sistema de coordenadas.

Ambas cuestiones se averiguarán experimentalmente con ayuda del sistema de visión aplicando técnicas de reconstrucción tridimensional y relaciones geométricas. La segunda cuestión se resolverá en el capítulo 6, mientras que la primera en este capítulo con los pasos que a continuación se describen:

- Partiendo de la posición de reposo del sistema articular ( $d_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0$ ,  $\theta_3 = 0$ ), girar el tercer eslabón para cinco posiciones fijas del segundo eslabón (para  $\theta_2 = 0$ ,  $\theta_2 = -13000$ ,  $\theta_2 = -26000$ ,  $\theta_2 = 13000$ ,  $\theta_2 = 26000$ ). La longitud del giro realizado dependerá de su espacio de trabajo, se debe considerar que a mayor longitud del giro se obtendrá mayor exactitud.
- Obtener el centro de giro de la trayectoria circular generada por cada uno de los cinco puntos.
- Determinar la recta que representa a estos cinco centros de giro, la cual corresponderá al eje de rotación buscado.
- Repetir el experimento para el segundo eslabón. Esta vez se realizará para posiciones fijas del tercer eslabón (para  $\theta_3 = 20000$ ,  $\theta_3 = 40000$ ,  $\theta_3 = 60000$ ) y determinar la recta que representa a todos los centros de giro de las trayectorias circulares generadas por los puntos del patrón, esta recta corresponderá al eje de giro del segundo eslabón.

Realizado los experimentos mencionados se han determinado las siguientes gráficas en 3D con respecto al sistema de coordenadas de la primera cámara (cámara izquierda), donde cada punto del patrón está representado por un color diferente según la Tabla 3.4.

Tabla 3.4.- Colores que representan a los puntos del patrón.

PUNTOS DEL PATRÓN	COLOR
uno	rojo
dos	verde
tres	azul
cuatro	magenta
cinco	amarillo

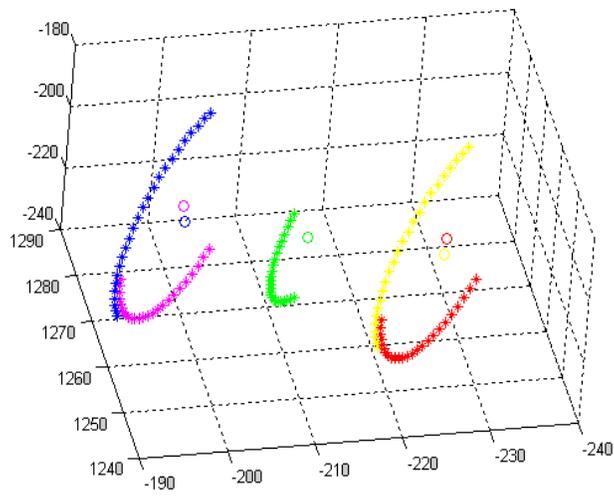


Figura 3.37.- Trayectorias circulares y centros de giro generadas por cada uno de los cinco puntos del patrón, al girar  $\theta_3$  cuando  $\theta_2 = 0$ .

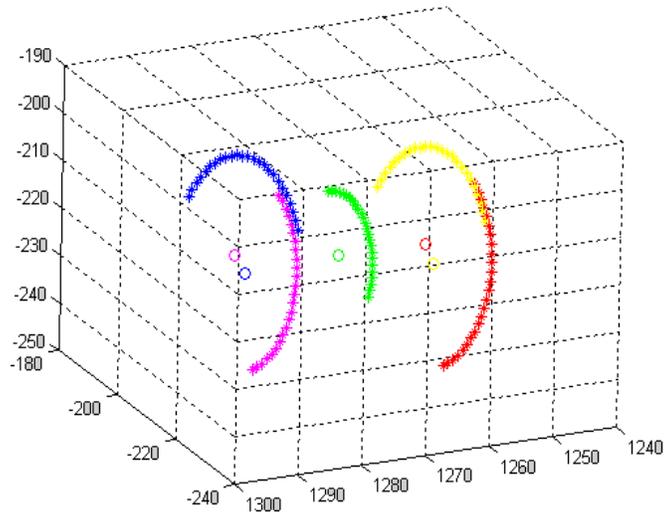


Figura 3.38.- Trayectorias circulares y centros de giro generadas por cada uno de los cinco puntos de la plataforma, al girar  $\theta_3$  cuando  $\theta_2 = -13000$ .

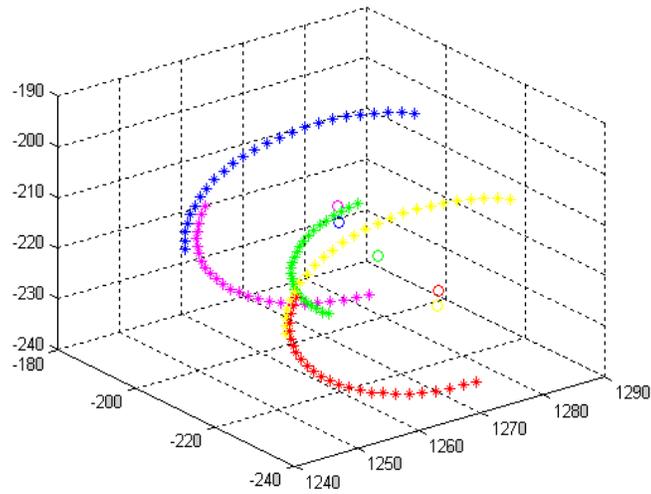


Figura 3.39.- Trayectorias circulares y centros de giro generadas por cada uno de los cinco puntos del patrón, al girar  $\theta_3$  cuando  $\theta_2 = 13000$ .

En cada una de las gráficas 3D anteriores, se observa que la recta que representa a los centros de giro corresponderá al eje de giro del eslabón. Esta recta se obtendrá mediante un proceso de regresión lineal. Las gráficas para  $\theta_2 = -26000$  y  $\theta_2 = 26000$  no se presentan pues son muy similares.

Las gráficas siguientes corresponden a las trayectorias generadas en la rotación del segundo eslabón para posiciones fijas del tercer eslabón:

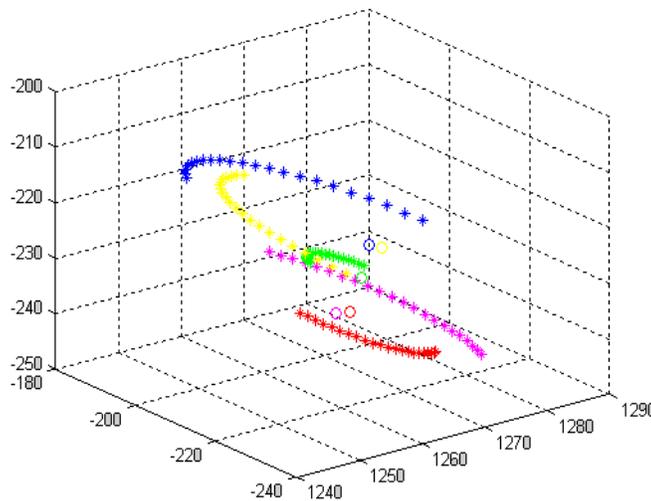


Figura 3.40.- Trayectorias circulares y centros de giro generados por cada uno de los cinco puntos del patrón, al girar  $\theta_2$  cuando  $\theta_3 = 20000$ .

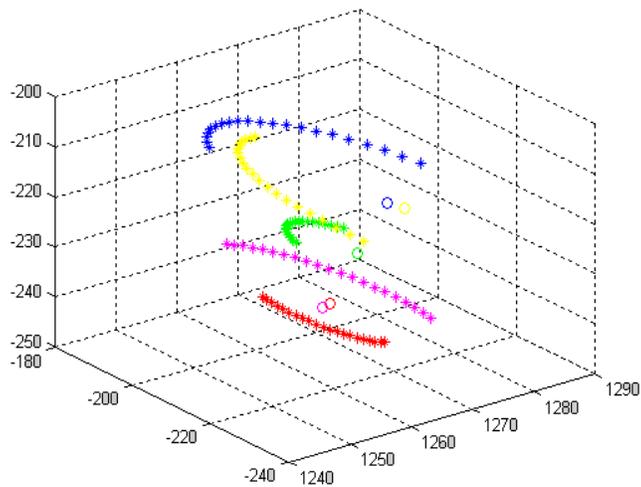


Figura 3.41.-Trayectorias circulares y centros de giro generados por cada uno de los cinco puntos del patrón, al girar  $\theta_2$  cuando  $\theta_3 = 40000$  .

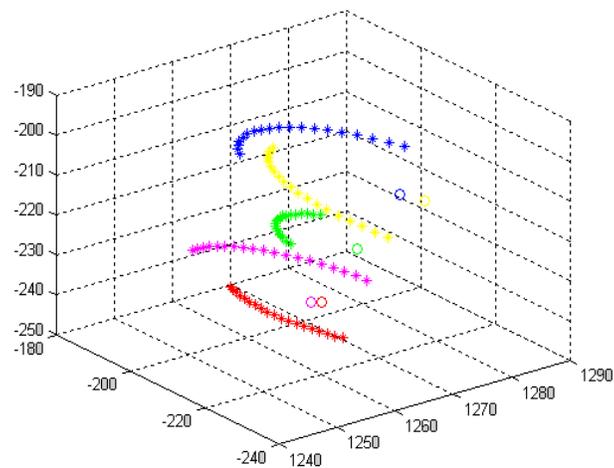


Figura 3.42.-Trayectorias circulares y centros de giro generados por cada uno de los cinco puntos del patrón, al girar  $\theta_2$  cuando  $\theta_3 = 60000$  .

Del mismo modo se observa también en cada una de estas gráficas, que la recta que representa a los centros de giro corresponderá al eje de rotación del segundo eslabón. Como no se ha movido el primer eslabón, el eje del segundo eslabón es fijo para cualquier posición del tercer eslabón, por lo que se le puede determinar a partir de todos los centros (15) encontrados para las tres posiciones del tercer eslabón.

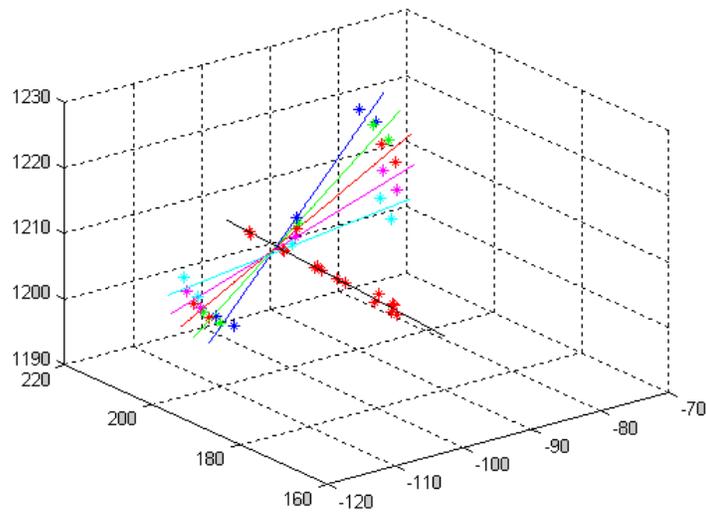


Figura 3.43.-Ejes de giro obtenidos halladas para el segundo eslabón (negro) y para el tercer eslabón en las posiciones  $\theta_2 = 0$  (rojo)  $\theta_2 = -13000$  (verde) y  $\theta_2 = -26000$  (azul),  $\theta_2 = 13000$  (magenta) y  $\theta_2 = 26000$  (cian).

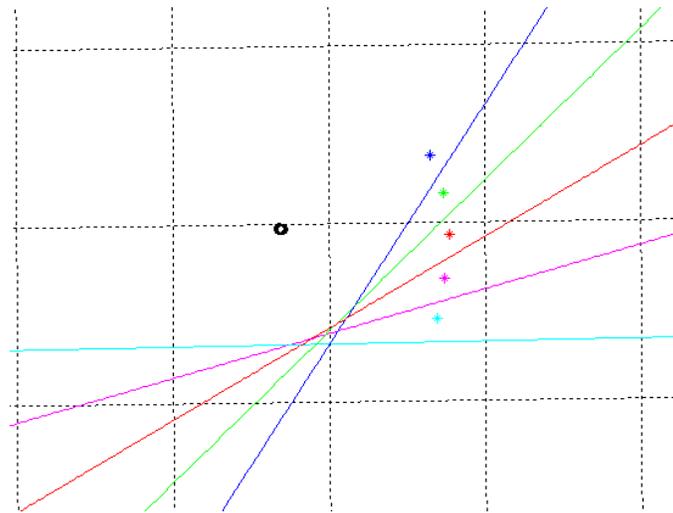


Figura 3.44.-Vista en detalle de los 5 ejes de rotación (horizontales) del tercer eslabón obtenidos, con el eje de rotación (vertical) del segundo eslabón visto de canto (color negro).

Observando la Figura 3.44, los ejes de rotación del tercer eslabón circunscriben una circunferencia de radio  $a_{2c}$ . El centro de esta circunferencia, corresponde la posición del eje de rotación del segundo eslabón. Según el modelo propuesto en la Figura 3.15, el radio de giro  $a_{2c}$  corresponde a la distancia entre el eje Z del sistema de coordenadas del primer eslabón

y el eje de rotación del tercer eslabón. Se ha determinado este valor igual a  $a_{2c} = 3.08$  mm.

### 3.5 CONCLUSIONES.

En todos los métodos de estimación de la matriz fundamental, el error medio disminuye a medida que se aumenta el número de datos de entrada (Figura 3.24). Para los métodos lineales y no lineales, el error máximo aumenta ligeramente a medida que se incrementan los datos de entrada, regla que no siguen los métodos robustos (Figura 3.25). Para todos los métodos, tanto el error medio y el error máximo aumentan a medida que se incrementa el ruido gaussiano (Figura 3.26) y (Figura 3.27). Los métodos robustos presentan bajo error medio a pesar de tener mayores valores de error máximo (Figura 3.28) y (Figura 3.29).

Considerando los resultados de las pruebas realizadas, se ha determinado utilizar el método SVD para la estimación de la matriz fundamental, debido a que soporta valores moderados tanto de ruido gaussiano como de ruido aleatorio. Tomando en cuenta que el entorno de pruebas utilizado es muy controlado, para la correcta detección de las características visuales, el uso de alguno de los métodos robustos no es necesario.

Se ha comprobado que con el conocimiento de la calibración de la cámara izquierda y derecha, a partir de la matriz fundamental, o a partir de una homografía entre ambas imágenes, se recupera la transformación rígida (rotación y traslación) entre cámaras con traslación escalada.

En la recuperación de la rotación y la traslación, a partir de la matriz fundamental, no hay muchas diferencias entre datos con o sin eliminación de errores de distorsión. En cambio a partir de homografías, siempre y cuando se hayan eliminado los errores de distorsión los resultados obtenidos son mucho mejores.

Con técnicas de visión tridimensional, se ha determinado la distancia entre los ejes de giro del segundo y tercer eslabón el cual al no ajustarse al modelo ideal corresponde a un error de fabricación. Se han alcanzado resultados con una precisión de décima de milímetro. En este paso ha sido importante la calibración previa de las cámaras. Esta distancia ha sido considerada en el modelo del robot.

Los resultados obtenidos en la determinación de los ejes de giro de los eslabones, depende fuertemente de la longitud de la trayectoria circular generada por cada uno de los puntos del patrón. Esta longitud depende del espacio de trabajo del sistema. A fin de incrementar la longitud de las trayectorias circulares, y por lo tanto la exactitud de los resultados, se han utilizado posiciones fuera del espacio de trabajo, cuyas características se han obtenido con software de procesamiento de imágenes de apoyo, utilizado para este caso la última versión de Títere (software de procesamiento de imágenes desarrollado en DISAM, Universidad Politécnica de Madrid).

# CAPITULO 4

## 4 ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO DE LA IMAGEN.

### 4.1 INTRODUCCIÓN.

El objetivo de todo esquema de control basado en visión es minimizar una función de error  $\mathbf{e}(t)$  de la forma [25]:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{s}^*(t) - \mathbf{s}_k(\mathbf{m}(t), \mathbf{a}) \quad (4.1)$$

tal que, cuando la tarea es alcanzada se cumpla que

$$\mathbf{e}(t) = 0 \quad (4.2)$$

donde  $\mathbf{s}^*(t)$  y  $\mathbf{s}_k(\mathbf{m}(t), \mathbf{a})$  son características de la imagen deseadas y actuales respectivamente, el vector  $\mathbf{m}(t)$  es un conjunto de mediciones hechas en la imagen, y  $\mathbf{a}$  es un conjunto de parámetros que representa información adicional del sistema (que puede ser parámetros de la calibración de la cámara, modelo CAD del objeto, etc) . El diseño de las características  $\mathbf{s}$  dependerá del esquema de control a usarse. Así en un esquema de control basado en imagen,  $\mathbf{s}$  consiste en un conjunto de características directamente medidas en la imagen, mientras que en un esquema de control basado en posición,  $\mathbf{s}$  consiste en un conjunto de parámetros 3D que deben ser estimados a partir de las mediciones hechas en la imagen.

Cambios en la posición del manipulador producen cambios en las características de la imagen detectadas por el sistema de visión. La relación lineal entre ellos se conoce como jacobiano de la imagen, y su estructura depende de la configuración del sistema así como del esquema de control utilizado, el éxito de la tarea de control depende de la exactitud de su estimación.

## 4.2 JACOBIANO DE LA IMAGEN.

Bajo la premisa de que la totalidad de las características son vistas en todo el espacio de trabajo, el jacobiano de la imagen relaciona el movimiento del sistema con la información visual proporcionada por los sensores visuales.

En el modelo lineal, el jacobiano de la imagen, relaciona cambios diferenciales en características de la imagen con cambios diferenciales en la posición del manipulador.

Sea  $\mathbf{r}$  el vector de coordenadas del manipulador en alguna parametrización del espacio de la tarea (ver anexo A), y  $\dot{\mathbf{r}}$  representa el vector de velocidades espaciales (velocity screw) del manipulador. Sea  $\mathbf{s}$  el vector de características de la imagen, y sea  $\dot{\mathbf{s}}$  el correspondiente vector de velocidades de características de la imagen. El jacobiano de la imagen es una transformación lineal de la forma:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_v \dot{\mathbf{r}} \quad (4.3)$$

donde  $\mathbf{J}_v$  es una matriz  $m \times p$ ,  $m$  es el número de características de la imagen,  $p$  es la dimensión del espacio de la tarea, tiene la forma:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial s_1}{\partial r_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial s_m}{\partial r_1} & \dots & \frac{\partial s_m}{\partial r_p} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

por lo que el número de columnas de  $\mathbf{J}_v$  depende del número de grados de libertad de la tarea y el número de filas depende del número de características de la imagen.

El jacobiano de la imagen fue introducido por Weiss [185] quien lo denominó matriz de sensibilidad, también es conocido como matriz de interacción [47] pues caracteriza la interacción entre el sensor y su entorno (así se le llamará en adelante al jacobiano de la imagen definido como en (4.3)). La expresión de la matriz de interacción (4.4) varía según el tipo de características de la imagen [20] [47] [85] (puntos, líneas, segmentos, momentos, etc). Una expresión general de la matriz de interacción para momentos en la imagen se presenta en [20]; se demuestra que las expresiones de la matriz de interacción para otras primitivas de la imagen como puntos, elipses, segmentos o líneas son casos particulares de esta misma expresión.

### 4.2.1 JACOBIANO DE UN PUNTO.

Si consideramos un punto  $\mathbf{m}$  en la imagen con coordenadas centrales  $(u, v)$  en un sistema de cámara fija con el efector final moviéndose con una velocidad  $\dot{\mathbf{r}}$  con respecto al sistema de coordenadas de la cámara, los puntos que observa la cámara están

unidos rígidamente al efector final. Considerando la transformación en perspectiva (3.1), se tiene:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{fX}{Z} \\ \frac{fY}{Z} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde  $f$  es la distancia focal.  $X, Y, Z$  son coordenadas del punto espacial proyectado en la imagen, con referencia al sistema de coordenadas de la cámara. Derivando (4.5) con respecto al tiempo:

$$\dot{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} f \frac{\dot{X}Z - X\dot{Z}}{Z^2} \\ f \frac{\dot{Y}Z - Y\dot{Z}}{Z^2} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Considerando la ecuación (A.3) del anexo A, y también la transformación en perspectiva (3.1), finalmente se tiene:

$$\dot{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} -\frac{f}{Z} & 0 & \frac{u}{Z} & \frac{uv}{f} & \frac{-f^2 - u^2}{f} & v \\ 0 & -\frac{f}{Z} & \frac{v}{Z} & \frac{f^2 + v^2}{f} & -\frac{uv}{f} & -u \end{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_c \quad (4.7)$$

donde  $\dot{\mathbf{r}}_c = [V_x \ V_y \ V_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  es el vector de velocidades espaciales referidos al sistema de coordenadas de la cámara. En caso que la variación del punto  $\dot{\mathbf{r}}$  esté referenciado al sistema del robot  $r$  (a la base del robot para el caso de configuración cámara fija, o al efector final para la configuración cámara en mano), deberá realizarse una transformación de velocidades del sistema  $r$  al sistema de coordenadas de la cámara  $c$  (ver Anexo A ecuación A.6) de la forma:

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{cr} & [\mathbf{t}_{cr}]_{\times} \mathbf{R}_{cr} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{cr} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_r = {}^c \mathbf{W}_r \dot{\mathbf{r}}_r \quad (4.8)$$

donde  ${}^c \mathbf{W}_r$  es la matriz de transformación de velocidades espaciales de  $r$  a  $c$ . Comparando (4.3) y (4.7) la matriz de interacción es:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} -\frac{f}{Z} & 0 & \frac{u}{Z} & \frac{uv}{f} & \frac{-f^2 - u^2}{f} & v \\ 0 & -\frac{f}{Z} & \frac{v}{Z} & \frac{f^2 + v^2}{f} & -\frac{uv}{f} & -u \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Como puede observarse,  $\mathbf{J}_v$  es función de la profundidad  $Z$  de cada punto considerado y de los parámetros de calibración de la cámara. Por lo que su exactitud dependerá en gran medida de la exactitud de estos parámetros. Con respecto a la profundidad  $Z$ , una solución muy utilizada es hacerla constante e igual a la posición deseada, pero su desventaja es que es válida solamente en una pequeña región del espacio de trabajo [21].

El número de filas de la expresión de la matriz de interacción (4.9) aumentará según se aumenta el número de características en la imagen, sus respectivos jacobianos se van apilando [125]. Para el caso particular de  $m/2$  puntos como características de la imagen, con coordenadas  $(u_1, v_1) \cdots (u_{m/2}, v_{m/2})$ , el  $\mathbf{J}_v$  total tendrá  $m$  filas y será de la siguiente forma:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{v_1} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{v_{m/2}} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

#### 4.2.2 JACOBIANO DE UNA LÍNEA.

En base a los parámetros de la representación normal de la línea, se construye la matriz de interacción  $\mathbf{J}_v$  que cumple  $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_v \dot{\mathbf{r}}_c$  donde  $\dot{\mathbf{s}} = [\dot{\theta} \ \dot{\rho}]^T$ , y  $\dot{\mathbf{r}}_c$  es el vector de velocidades espaciales con respecto al sistema de la cámara. Usando el mismo razonamiento para el caso de puntos en la imagen, la matriz de interacción cuando se utilizan líneas como características está dada por [47]:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} \lambda_\theta \cos \theta & \lambda_\theta \sin \theta & -\lambda_\theta \rho & -\rho \cos \theta & -\rho \sin \theta & -1 \\ \lambda_\rho \cos \theta & \lambda_\rho \sin \theta & -\lambda_\rho \rho & (1 + \rho^2) \sin \theta & -(1 + \rho^2) \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

si la ecuación del plano que contiene a la línea tiene la forma  $aX + bY + cZ = d$ , donde  $d$  es la distancia del plano al origen de coordenadas y  $(a, b, c)$  son los elementos de un vector perpendicular al plano, y este plano no pasa por el centro óptico de la cámara ( $d \neq 0$ ),  $\lambda_\theta$  y  $\lambda_\rho$  están expresados como:

$$\lambda_\theta = \frac{a \sin \theta - b \cos \theta}{d} \quad \text{y} \quad \lambda_\rho = \frac{a \rho \cos \theta + b \rho \sin \theta + c}{d} \quad (4.12)$$

#### 4.3 JACOBIANO VISUAL-MOTOR.

La velocidad de las características de la imagen pueden ser relacionadas directamente con la velocidad de las articulaciones del robot, a través del llamado jacobiano visual-motor [88] [174]

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (4.13)$$

Éste es un jacobiano compuesto que relaciona la matriz de interacción  $\mathbf{J}_v$  y el jacobiano del robot  $\mathbf{J}_R$ :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_v \mathbf{J}_R \quad (4.14)$$

El jacobiano visual-motor tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial s_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial s_m}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial s_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Realizar control visual con el jacobiano visual-motor trae sus ventajas, pues su estimación no depende de la profundidad  $Z$ , además esta estimación se puede llevar a cabo directamente a partir de cambios en articulaciones y cambios en características en píxeles. La estimación del jacobiano en la presente tesis, se refiere a la estimación del jacobiano visual-motor que en adelante en este capítulo se le llamará con el nombre genérico de jacobiano.

#### 4.4 CASO DE DOS O MÁS CÁMARAS.

Los sistemas de control basados en visión cumplen con la importante propiedad de estar explícitamente conectados a la geometría del espacio de trabajo del robot [64] y por ende al espacio de articulaciones. Bajo la anterior premisa es posible generar algoritmos de control componiendo restricciones cinemáticas usando funciones de error en el espacio de la tarea que automáticamente derivan la equivalente función de error en la imagen. En el presente punto se describe la adaptación a dos cámaras, primero para la matriz de interacción y posteriormente para el jacobiano visual-motor.

Para un sistema de dos cámaras se tiene una matriz de interacción diferente para cada cámara, los cuales dependen del movimiento del mismo robot (movimiento del punto en el espacio de la tarea). Siguiendo el mismo criterio que para el caso del incremento de características en la imagen (ecuación (4.10)), se apilan ambas matrices de interacción pero considerando las respectivas transformaciones robot-cámara: [124]:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1v} \mathbf{}^1\mathbf{M}_r \\ \mathbf{J}_{2v} \mathbf{}^2\mathbf{M}_r \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

donde  $\mathbf{J}_{1v}, \mathbf{J}_{2v}$  son la matriz de interacción de la primera y segunda cámara respectivamente,  $\mathbf{}^1\mathbf{M}_r$ , y  $\mathbf{}^2\mathbf{M}_r$  son las transformaciones de velocidades entre el robot y

la primera y segunda cámara respectivamente [79]. Este mismo modelo, se puede aplicar para mayor número de cámaras [118] [125].

Para el caso del jacobiano visual-motor, éste depende directamente de los movimientos de las articulaciones del robot (ecuación (4.13) y (4.14)), y ya no es necesario considerar la transformación de velocidad robot-cámara. Para un sistema de dos cámaras, el jacobiano total  $\mathbf{J}$  que representa la interacción de ambas cámaras con el entorno viene a ser [64] [79] [124]:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

donde  $\mathbf{J}_1$  y  $\mathbf{J}_2$  son los jacobianos de la primera y segunda cámara respectivamente. Para mayor número de cámaras, se sigue la misma adaptación, es decir el apilamiento de sus respectivos jacobianos.

En los siguientes apartados se expondrán los métodos existentes en la literatura para la estimación del jacobiano, para posteriormente presentar los métodos propuestos en la presente tesis.

Un caso particular y que constituye el principal aporte en la presente tesis es el cálculo de los jacobianos de la primera y segunda cámaras considerando la información de la geometría epipolar del sistema [162], los detalles de la misma se muestra en el apartado 4.8.2.

#### 4.5 CONSIDERACIONES PREVIAS EN LA ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO.

Debido a la naturaleza discreta de las pruebas realizadas, en vez de una configuración en el espacio de velocidades en características y articulaciones, se asumirán movimientos discretos de carácter infinitesimal en ambos espacios, por los que las velocidades pueden representarse simplemente por cambios en parámetros, de tal manera que la ecuación (4.13) puede ser aproximada a:

$$\frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \mathbf{J} \frac{\Delta \mathbf{q}}{\Delta t} \quad \text{ó} \quad \Delta \mathbf{s} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{q} \quad (4.18)$$

Los cambios tanto en características como en articulaciones se asumen constantes en este pequeño intervalo de tiempo, y el jacobiano estimado es válido sólo para las vecindades y la posición actual del manipulador. Para una siguiente posición, se considerarán nuevos cambios tanto en características y articulaciones.

Bajo esta suposición la estimación del jacobiano de la imagen es válida cuando el manipulador se encuentra en movimiento, pues las características de la imagen van cambiando de acuerdo a su posición y por lo consiguiente el jacobiano, al ser éste dependiente tanto de las características en la imagen y de sus articulaciones.

Si se considera una aproximación de primer orden, donde para la posición en articulaciones  $\mathbf{q}_{k-1}$  se observa las características  $\mathbf{s}_{k-1}$  en el período de muestreo  $(k-1)\Delta t$ , las características de la imagen  $\mathbf{s}_k$  y articulaciones  $\mathbf{q}_k$  en el momento  $k$  son:

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{s}_{k-1} + \dot{\mathbf{s}}\Delta t \quad \text{y} \quad \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_{k-1} + \dot{\mathbf{q}}\Delta t \quad (4.19)$$

donde  $k-1$  significa el momento anterior. El incremento en características está representado por

$$\Delta \mathbf{s}_k = \mathbf{s}_k - \mathbf{s}_{k-1} \quad (4.20)$$

y el incremento en articulaciones por:

$$\Delta \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1} \quad (4.21)$$

Para el caso concreto de puntos en la imagen  $\mathbf{s} = (x, y)^T$ , y un sistema articular de tres grados de libertad  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ , la expresión (4.18) en el momento  $k$  toma la forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_{1k} \\ \Delta q_{2k} \\ \Delta q_{3k} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

donde se ha considerado los incrementos en características y articulaciones en el momento  $k$  como la diferencia de sus valores en el momento actual  $k$  y el momento anterior  $k-1$ :

$$\Delta \mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k - x_{k-1} \\ y_k - y_{k-1} \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{q}_k = \begin{bmatrix} \Delta q_{1k} \\ \Delta q_{2k} \\ \Delta q_{3k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1k} - q_{1(k-1)} \\ q_{2k} - q_{2(k-1)} \\ q_{3k} - q_{3(k-1)} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

y el jacobiano de la imagen como:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

#### 4.6 ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO CON MÉTODOS NO ITERATIVOS.

En los métodos no iterativos, se estima el jacobiano a base de conformar un sistema lineal de ecuaciones. El número de ecuaciones depende del número de características y movimientos previos considerados. Se ha estudiado el método más representativo, el cual se detalla a continuación.

#### 4.6.1 ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO EN BASE A LOS $N$ ÚLTIMOS MOVIMIENTOS.

Método propuesto por Sutanto [174], utiliza una aproximación de primer orden, y estima el jacobiano en base a la información en características y articulaciones de los  $N$  últimos movimientos realizados. El jacobiano estimado se supone constante durante estos  $N$  últimos movimientos. Considerando la ecuación (4.18) se cumple que:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{s}_{k-N+1}^T \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{s}_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_{k-N+1}^T \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{q}_k^T \end{bmatrix} \mathbf{J}^T \quad (4.25)$$

En base a esta expresión, para un sistema de  $m$  características y  $n$  articulaciones, se forma un sistema lineal de ecuaciones de la forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (4.26)$$

donde  $\mathbf{x}$  es un vector con los  $mn$  elementos del jacobiano de la imagen,  $\mathbf{b}$  es un vector con los  $Nm$  incrementos de características,  $\mathbf{A}$  es una matriz de  $Nm$  filas y  $mn$  columnas construida con los incrementos de articulaciones. Según el número de  $N$  últimos movimientos considerados se obtendrá un sistema determinado o sobredeterminado. Si se obtiene un sistema determinado la solución al sistema es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (4.27)$$

Si se consideran más movimientos de los necesarios se obtendrá un sistema sobredeterminado, y la solución al sistema será:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} \quad (4.28)$$

donde  $\mathbf{A}^+$  es la pseudoinversa de  $\mathbf{A}$  que se define como:

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (4.29)$$

En algunos casos, debido a movimientos con la misma dirección, puede obtenerse una matriz  $\mathbf{A}$  mal condicionada cercana a la matriz singular, deteriorando la estimación del jacobiano, Sutanto [174] resuelve este caso realizando movimientos exploratorios que son movimientos con cierta perturbación que permiten alejarse de la posición singular.

## 4.7 ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO CON MÉTODOS ITERATIVOS.

Se actualiza iterativamente el jacobiano utilizando la información proporcionada por el último movimiento realizado, se asume el que el jacobiano es constante durante cada intervalo de tiempo. Esta iteración puede hacerse por el método de Broyden [42] [144], por el método de mínimos cuadrados recursivos (RLS) [144] [82] o por el método de Kalman [159].

### 4.7.1 MÉTODO DE BROYDEN.

Es una extensión del método de la secante, actualizando sólo la información derivativa de la dirección de movimiento sin considerar posibles movimientos mal condicionados de movimientos anteriores. La ecuación de Broyden para una tarea de seguimiento (caso dinámico) es:

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{J}_{k-1} + \frac{\left( \Delta \mathbf{e}_k + \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial t} \Delta t - \mathbf{J}_{k-1} \Delta \mathbf{q}_k \right) \Delta \mathbf{q}_k^T}{\Delta \mathbf{q}_k^T \Delta \mathbf{q}_k} \quad (4.30)$$

donde

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{s}_k^* - \mathbf{s}_k \quad (4.31)$$

es el error en características de la imagen,  $\mathbf{s}_k^*$  son características deseadas,  $\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial t}$  es la velocidad del error. Cuando no hay cambio en las características deseadas este último término se hace cero, y se tiene la expresión para una tarea de posicionamiento (caso estático).

### 4.7.2 UTILIZANDO EL FILTRO DE KALMAN.

En este método se considera que las ecuaciones de estado del sistema son [159]:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (4.32)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de estado de dimensión  $mn$  formado por la concatenación de las  $m$  filas del jacobiano de la imagen;  $m$  numero de características de la imagen;  $n$  número de articulaciones:

$$\mathbf{x} = \left[ \frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{q}} \quad \dots \quad \frac{\partial s_m}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \quad (4.33)$$

donde  $\frac{\partial s_i}{\partial \mathbf{q}}$  es cada fila del jacobiano  $\mathbf{J}_k$  a encontrarse,  $s_1, s_2, \dots, s_m$  características de la imagen.  $\mathbf{y}_k = \mathbf{s}_{k+1} - \mathbf{s}_k$  es el vector de medidas,  $\boldsymbol{\eta}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  ruido del estado y de la medida respectivamente, y

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_k^T & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \Delta \mathbf{q}_k^T \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

es la matriz  $m \times mn$  con los incrementos en las articulaciones. Las ecuaciones del filtro de Kalman son:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^- &= \mathbf{P}_k + \mathbf{R}_\eta \\ \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T [\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_\nu]^{-1} \\ \mathbf{P}_{k+1} &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_k] \mathbf{P}_{k+1}^- \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k] \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde  $\mathbf{P}_k$  es la matriz de errores de covarianza en el momento  $k$ .  $\mathbf{P}_{k+1}^-$  es la predicción de  $\mathbf{P}_k$ ,  $\mathbf{R}_\eta$  y  $\mathbf{R}_\nu$  son las matrices de covarianzas para el estado y la medida respectivamente,  $\mathbf{K}_{k+1}$  es la ganancia de Kalman.

### 4.7.3 MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS RECURSIVOS.

Se basa en las ecuaciones del filtro de Kalman iterativo con factor de olvido, realizándose un filtrado de los datos de entrada, por lo que lo hace adecuado para casos con datos contaminados con ruido. Las ecuaciones de este método se obtienen minimizando una función ponderada exponencialmente [144], las cuales son:

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{J}_{k-1} + \frac{\left( \Delta \mathbf{e}_k + \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial t} \Delta t - \mathbf{J}_{k-1} \Delta \mathbf{q}_k \right) \Delta \mathbf{q}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda + \Delta \mathbf{q}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \Delta \mathbf{q}_k} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{\lambda} \left( \mathbf{P}_{k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \Delta \mathbf{q}_k \Delta \mathbf{q}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda + \Delta \mathbf{q}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \Delta \mathbf{q}_k} \right) \quad (4.37)$$

donde  $\mathbf{P}_k$  es la matriz de covarianzas,  $\lambda$  es un factor de olvido que toma en cuenta los movimientos anteriores y debe sintonizarse en el intervalo  $0 < \lambda < 1$ . Si  $\lambda$  toma valor uno se consideran todos los movimientos anteriores, si toma valor cero sólo el último. En las pruebas con y sin ruido añadido realizadas en este como en el siguiente capítulo,

se ha determinado un valor de  $\lambda = 0.9$  como el valor mas adecuado. Al igual que en el método de Broyden, el término  $\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial t}$  se hace cero para tareas de posicionamiento.

#### 4.8 NUEVOS ALGORITMOS DE ESTIMACIÓN DEL JACOBIANO.

Como parte de los aportes de la presente tesis, figura la implementación de nuevos algoritmos de estimación del jacobiano, los cuales son de carácter no iterativo, y se describe a continuación.

##### 4.8.1 BASADOS EN LA FIABILIDAD.

El jacobiano de la imagen, ecuación (4.15) depende fuertemente de la posición del punto en la imagen, por lo que la suposición de que es constante solo será válida en el entorno del punto en la imagen. Por tal motivo una primera posibilidad es la de potenciar positivamente los movimientos ya efectuados con un pequeño recorrido en las características de la imagen. Sin embargo estos movimientos son excesivamente sensibles al ruido, por lo que será necesario buscar un compromiso entre ambos aspectos. Igualmente parecen más adecuados aquellos movimientos ya efectuados que se producen en el entorno articular del movimiento deseado.

Por tal motivo se ha definido el concepto de fiabilidad que depende de dos factores que recogen estos conceptos:

$$fiabilidad_{ki} = Factor1_i / Factor2_{ki} \quad (4.38)$$

donde el subíndice  $k$  representa el último movimiento efectuado y el subíndice  $i$  variará entre los movimientos ya efectuados que hayan sido almacenados. Es necesario destacar que el  $Factor1_i$  depende sólo de los movimientos ya efectuados, mientras que en el  $Factor2_{ki}$  también interviene el último movimiento efectuado.

El  $Factor1_i$  potencia movimientos en los que las características varían dentro de un rango: no son muy grandes para que el Jacobiano se pueda considerar constante ni son muy pequeños para que no sean muy sensibles al ruido. La expresión empleada es:

$$Factor1_i = \frac{1}{\frac{abs(\|\Delta s_i\| - F)}{F} + R} \quad (4.39)$$

Donde  $R$  representa la estimación del error en el cálculo de características (por ejemplo para 5 puntos detectados con precisión subpixel un valor cercano a 1.0), y  $F$  representa una estimación del máximo incremento fiable en las características para considerar que el jacobiano no cambia (por ejemplo 20 píxeles). Este factor no depende del último movimiento realizado, por lo que puede ser calculado y almacenado junto con el correspondiente movimiento.

El  $Factor2_{ki}$  potencia aquellos movimientos ya almacenados que se han producido en el entorno articular del movimiento deseado, comparándose a tal fin la posición articular actual con el punto medio de las posiciones articulares ya efectuadas. Su expresión es:

$$Factor2_{ki} = \left\| \mathbf{q}_k - \left( \frac{\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_{i-1}}{2} \right) \right\| \quad (4.40)$$

La aplicación conjunta de la definición de fiabilidad y el método de los  $N$  últimos movimientos ha generado nuevos algoritmos implementados que a continuación se describen:

#### 4.8.1.1 $M$ MOVIMIENTOS MÁS FIABLES DE LOS $N$ ÚLTIMOS.

De los  $N$  últimos movimientos realizados se elige los  $M$  movimientos más fiables según la expresión de fiabilidad propuesta en (4.38), con los datos de estos movimientos se construye el sistema de ecuaciones de la forma de (4.26), ( $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x}$  es un vector con los  $mn$  elementos del jacobiano de la imagen,  $\mathbf{b}$  es un vector con los  $Mm$  incrementos de características,  $\mathbf{A}$  es una matriz de  $Mm$  filas y  $mn$  columnas construida con los incrementos de articulaciones,  $m$  es el número de características y  $n$  es el número de articulaciones) resolviendo este sistema se encuentra los elementos del jacobiano buscado. En este método,  $M$  está pensado para ser igual al número de grados de libertad del sistema articular ( $M = n$ ), por lo que (4.26) será un sistema determinado de ecuaciones de orden  $mn$ .

#### 4.8.1.2 $M$ MOVIMIENTOS MÁS FIABLES.

Se calcula la fiabilidad para cada movimiento, y se las almacena en una tabla que contiene  $M$  elementos; estos elementos son las fiabilidades de los movimientos con mayor fiabilidad, ordenados de mayor a menor.

Al realizarse un nuevo movimiento, su fiabilidad se la compara con el elemento de menor valor de la tabla, si es mayor que este, ocupará su lugar y a continuación se realiza una nueva ordenación de la tabla. Con los datos de esta tabla se construye el sistema de ecuaciones de la forma de (4.26) ( $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{x}$  es un vector con los  $mn$  elementos del jacobiano de la imagen,  $\mathbf{b}$  es un vector con los  $Mm$  incrementos de características,  $\mathbf{A}$  es una matriz de  $Mm$  filas y  $mn$  columnas construida con los incrementos de articulaciones,  $m$  es el número de características y  $n$  es el número de articulaciones). Este algoritmo está pensado para considerar un número  $M$  mayor que el número de grados de libertad del sistema ( $M = 10$ ), por lo que se obtendrá un sistema sobredeterminado de ecuaciones a resolverse por el método de mínimos cuadrados.



En este método se asume que la matriz fundamental  $\mathbf{F}$  es conocida, obtenida en una etapa previa fuera de línea por alguno de los métodos descritos en la sección 3.2.4. La experiencia indica que su estimación es relativamente fácil y robusta.

Para cada movimiento, se construye un sistema de ecuaciones que incluye una ecuación (4.51) no lineal, este sistema se resuelve por un algoritmo de optimización no lineal adecuado.

En un movimiento  $k$ , para cada punto considerado del objeto de control se tienen dos ecuaciones (una para cada cámara) de la forma de (4.18):

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{s}_k &= \mathbf{J} \Delta \mathbf{q}_k \\ \Delta \mathbf{s}'_k &= \mathbf{J}' \Delta \mathbf{q}_k\end{aligned}\tag{4.43}$$

donde los parámetros para la segunda cámara son representados por  $'$ . Considerando las características  $x$  e  $y$  asociadas a cada punto  $(x, y)$  en la imagen, se tienen cuatro ecuaciones por punto utilizado (dos ecuaciones por cada imagen), se añade una quinta ecuación que representa la restricción epipolar (3.33) para las proyecciones de este punto:

$$\tilde{\mathbf{s}}_k'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{s}}_k = 0\tag{4.44}$$

El incremento de características se considera entre el momento actual  $k$  y anterior  $k-1$ , como en (4.20), de donde las características en ambas cámaras en el momento  $k-1$  son:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{k-1} &= \mathbf{s}_k - \Delta \mathbf{s}_k \\ \mathbf{s}'_{k-1} &= \mathbf{s}'_k - \Delta \mathbf{s}'_k\end{aligned}\tag{4.45}$$

los incrementos de características están relacionados con el jacobiano de la imagen según (4.43), reemplazando en (4.45), se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{k-1} &= \mathbf{s}_k - \mathbf{J} \Delta \mathbf{q}_k \\ \mathbf{s}'_{k-1} &= \mathbf{s}'_k - \mathbf{J}' \Delta \mathbf{q}_k\end{aligned}\tag{4.46}$$

expresando (4.46) en coordenadas proyectivas, se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{s}}_{k-1} &= \tilde{\mathbf{s}}_k - \tilde{\mathbf{J}} \Delta \mathbf{q}_k \\ \tilde{\mathbf{s}}'_{k-1} &= \tilde{\mathbf{s}}'_k - \tilde{\mathbf{J}}' \Delta \mathbf{q}_k\end{aligned}\tag{4.47}$$

donde se ha introducido la notación  $\tilde{\mathbf{J}}$  y  $\tilde{\mathbf{J}}'$  para hacer dimensionalmente compatibles con la notación en coordenadas proyectivas:

Estimación del Jacobiano de la Imagen

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{J}}' = \begin{bmatrix} J'_{11} & J'_{12} & J'_{13} \\ J'_{21} & J'_{22} & J'_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

sustituyendo estas características  $\tilde{\mathbf{s}}_{k-1}$  y  $\tilde{\mathbf{s}}'_{k-1}$  en la ecuación (4.44), se tiene

$$\left( \tilde{\mathbf{s}}'_k - \tilde{\mathbf{J}}' \Delta \mathbf{q}_k \right)^T \mathbf{F} \left( \tilde{\mathbf{s}}_k - \tilde{\mathbf{J}} \Delta \mathbf{q}_k \right) = 0 \quad (4.49)$$

desarrollando:

$$\Delta \mathbf{q}_k^T \tilde{\mathbf{J}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{J}} \Delta \mathbf{q}_k - \Delta \mathbf{q}_k^T \tilde{\mathbf{J}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{s}}_k - \tilde{\mathbf{s}}_k'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{J}} \Delta \mathbf{q}_k + \tilde{\mathbf{s}}_k'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{s}}_k = 0 \quad (4.50)$$

eliminando el último término, que representa la restricción epipolar en este momento  $k$   $\tilde{\mathbf{s}}_k'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{s}}_k = 0$ , se obtiene una expresión que relaciona la matriz fundamental, los jacobianos y características de ambas imágenes, así como los incrementos en articulaciones:

$$\Delta \mathbf{q}_k^T \tilde{\mathbf{J}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{J}} \Delta \mathbf{q}_k - \Delta \mathbf{q}_k^T \tilde{\mathbf{J}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{s}}_k - \tilde{\mathbf{s}}_k'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{J}} \Delta \mathbf{q}_k = 0 \quad (4.51)$$

se observa que esta ecuación es no lineal y de carácter cuadrático en las incógnitas  $\tilde{\mathbf{J}}$  y  $\tilde{\mathbf{J}}'$ .

reuniendo (4.51) con las ecuaciones lineales (4.43), se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones lineales y una no lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{s}_k = \mathbf{J} \Delta \mathbf{q}_k \begin{cases} \Delta x_k = J_{11} \Delta q_{1k} + J_{12} \Delta q_{2k} + J_{13} \Delta q_{3k} \\ \Delta y_k = J_{21} \Delta q_{1k} + J_{22} \Delta q_{2k} + J_{23} \Delta q_{3k} \end{cases} \\ \Delta \mathbf{s}'_k = \mathbf{J}' \Delta \mathbf{q}_k \begin{cases} \Delta x'_k = J'_{11} \Delta q_{1k} + J'_{12} \Delta q_{2k} + J'_{13} \Delta q_{3k} \\ \Delta y'_k = J'_{21} \Delta q_{1k} + J'_{22} \Delta q_{2k} + J'_{23} \Delta q_{3k} \end{cases} \\ \Delta \mathbf{q}_k^T \tilde{\mathbf{J}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{J}} \Delta \mathbf{q}_k - \Delta \mathbf{q}_k^T \tilde{\mathbf{J}}'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{s}}_k - \tilde{\mathbf{s}}_k'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{J}} \Delta \mathbf{q}_k = 0 \end{array} \right. \quad (4.52)$$

donde se ha considerado los incrementos en características y articulaciones en el momento  $k$  como los de la ecuación (4.24), pero considerando además las características de la segunda cámara:

$$\Delta \mathbf{s}' = \begin{bmatrix} \Delta x'_k \\ \Delta y'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_k - x'_{k-1} \\ y'_k - y'_{k-1} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

la matriz fundamental  $\mathbf{F}$  está definida como en la ecuación (3.53), y el jacobiano para la primera cámara como en (4.24), y para la segunda cámara como:

$$\mathbf{J}' = \begin{bmatrix} J'_{11} & J'_{12} & J'_{13} \\ J'_{21} & J'_{22} & J'_{23} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

donde las incógnitas del sistema (4.52) son los elementos de los jacobianos  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{J}'$ .

Hay que hacer notar que el sistema (4.52) corresponde a las proyecciones en la imagen de un punto en la escena; si se consideran mayor número de puntos, se consiguen tantos sistemas (4.52) como puntos haya, incrementándose por lo tanto el número de incógnitas. Para obtener el número de ecuaciones suficiente para su resolución, debe combinarse con ecuaciones de movimientos anteriores, suponiendo al igual que en el método de Sutanto [174] los jacobianos  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{J}'$  constantes para todos estos movimientos.

El sistema de ecuaciones formado se resuelve por un método de optimización no lineal. Se ha elegido el método de Levenberg-Marquadt (ver el Anexo D). Se ha elegido este método por sus propiedades, las cuales son: rapidez de convergencia, capacidad de evitar mínimos locales y robustez frente a singularidades.

#### 4.9 EXPERIMENTOS.

Se han implementado ocho métodos de estimación del jacobiano de la imagen, que se muestran en la Tabla 4.1. Los cuatro primeros son originales, se basan en los métodos no iterativos y utilizan el concepto de fiabilidad definido previamente, el último de ellos (FUNDMAT) además incorpora información de la matriz fundamental. Los cuatro restantes corresponden a los existentes en la literatura.

Tabla 4.1.- Nomenclatura de los algoritmos implementados.

ALGORITMO	DESCRIPCIÓN
3+REL	3 movimientos más confiables entre los últimos 10 realizados.
10+REL	10 movimientos más confiables realizados.
10LASTW	10 últimos movimientos realizados ponderados por su confiabilidad.
FUNDMAT	10 movimientos más confiables realizados añadiendo la restricción epipolar.
3LAST	3 últimos movimientos realizados.
BROYDEN	Método de Broyden.
RLS	Mínimos cuadrados recursivos.
KALMAN	Usando filtro de Kalman.

Los experimentos realizados corresponden a la estimación del jacobiano en cada una de las posiciones de una secuencia de 15 posiciones consecutivas que siguen una trayectoria alabeada en el espacio de trabajo (Figura 4.1). La estimación se realiza con cada uno de los algoritmos que se detallan en la Tabla 4.1.

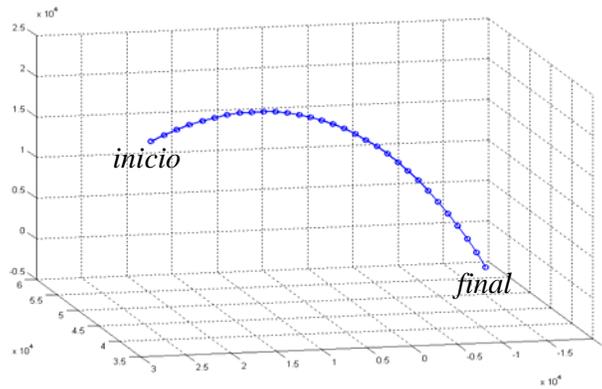


Figura 4.1.- Trayectoria de 15 posiciones en el espacio de trabajo.

Como criterio de evaluación, se ha determinado los valores singulares de la expresión  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  a partir del jacobiano estimado en cada una de las últimas cinco posiciones (11-15) usándose dos, tres, cuatro o cinco puntos del patrón de puntos. La expresión  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  posee tres valores singulares puesto que el sistema articular utilizado es de tres grados de libertad. Resultados para la cámara izquierda para cada uno de los algoritmos implementados se muestran en gráficas 3D con ejes de coordenadas: número de posición (entre 11 y 15) VS número de puntos utilizados (entre 2 y 5) VS valor del valor singular (Figura 4.2 - Figura 4.9). Se ha obviado mostrar resultados para la cámara derecha al ser éstos muy similares. En estas gráficas las marcas de color rojo (círculo) corresponden al primer valor singular, magenta (triángulo) al segundo y azul (cuadrado) al tercero. En la segunda parte de las pruebas, se repiten los experimentos pero esta vez añadiendo ruido gaussiano con valor  $\sigma = 0.5$  en la detección de las características visuales (Figura 4.10 -Figura 4.17).

Parece deseable que los valores singulares no se vean significativamente modificados por el ruido, y que tampoco varien mucho en las sucesivas iteraciones. La incorporación de nuevos puntos si que puede variar significativamente a los valores singulares (nuevo jacobiano).

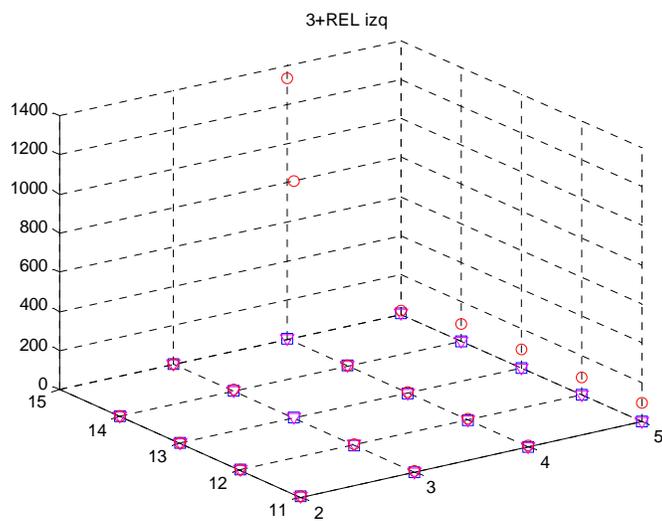


Figura 4.2.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de 3+REL, cámara izquierda.

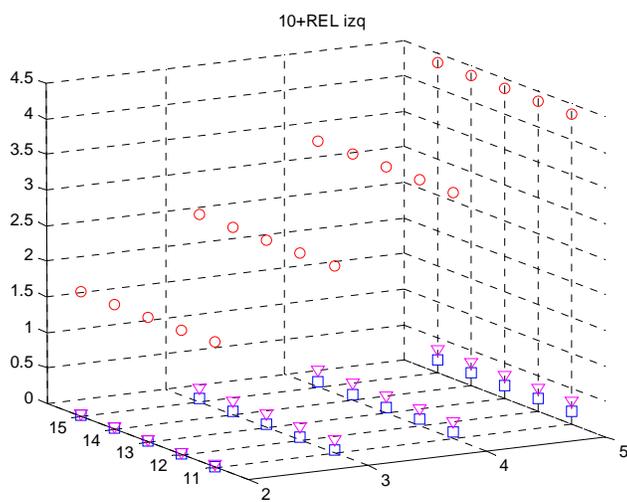


Figura 4.3.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de 10+REL, cámara izquierda.

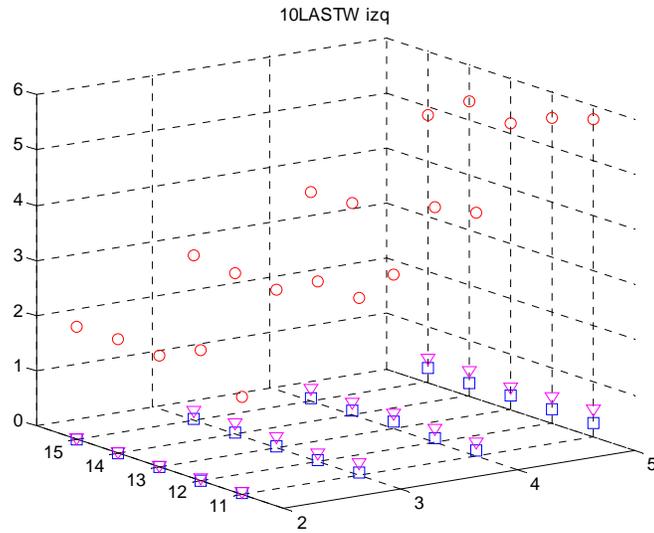


Figura 4.4.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de 10LASTW, cámara izquierda.

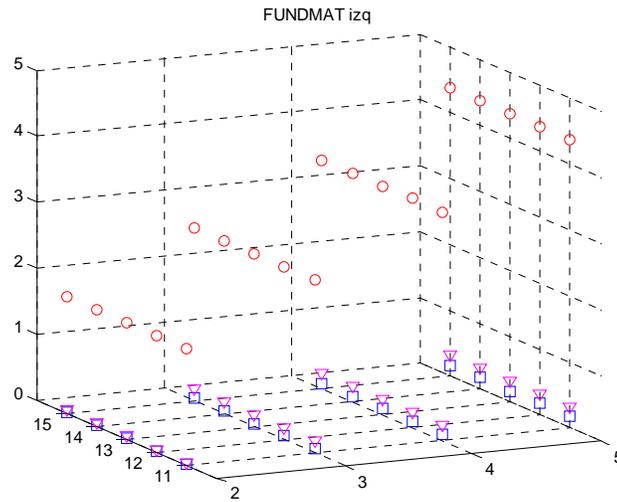


Figura 4.5.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de FUNDMAT, cámara izquierda.

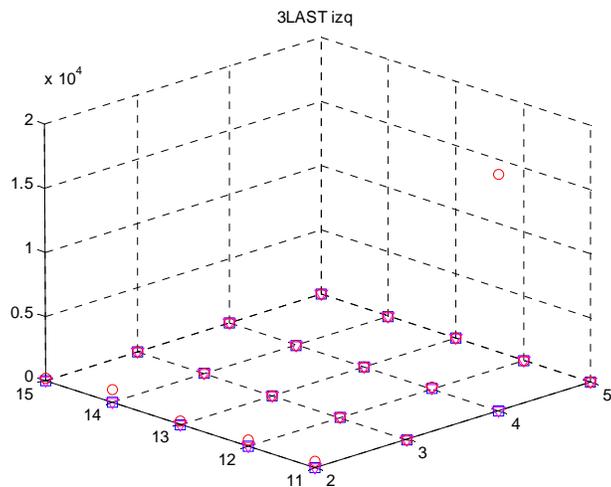


Figura 4.6.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de 3LAST, cámara izquierda.

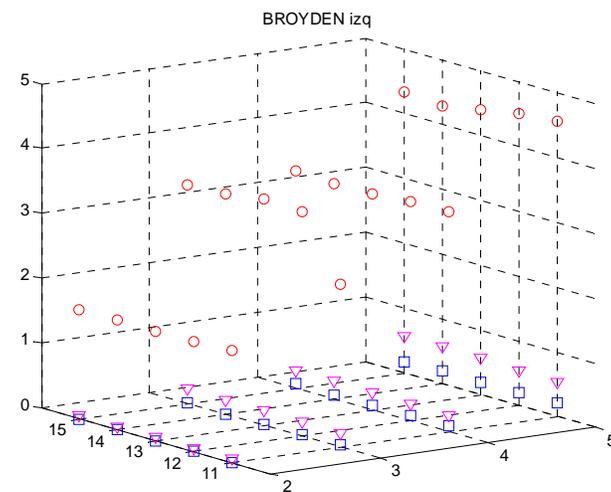


Figura 4.7.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de BROYDEN, cámara izquierda.

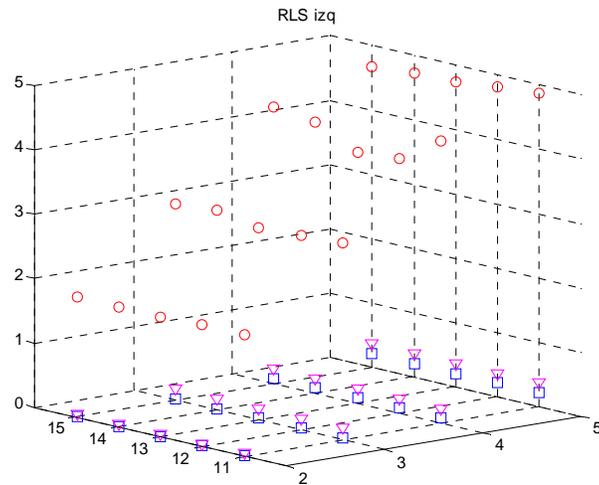


Figura 4.8.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de RLS, cámara izquierda.

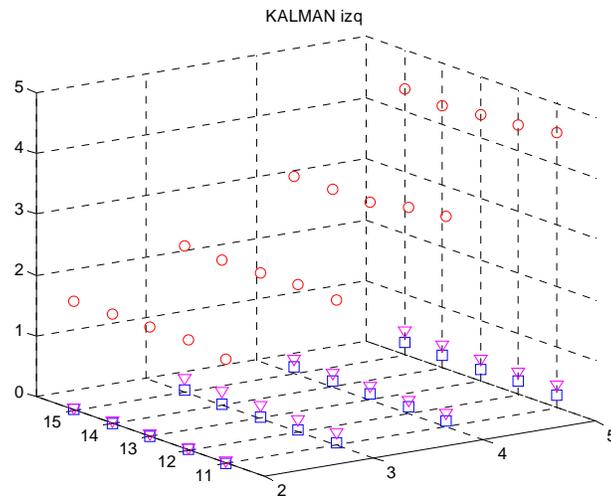


Figura 4.9.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de KALMAN, cámara izquierda.

De las gráficas anteriores, se observa que casi todos los algoritmos implementados poseen una distribución adecuada de los valores singulares de la expresión  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ , a excepción de 3+REL y 3LAST. Resultados para las pruebas con ruido añadido se muestran a continuación:

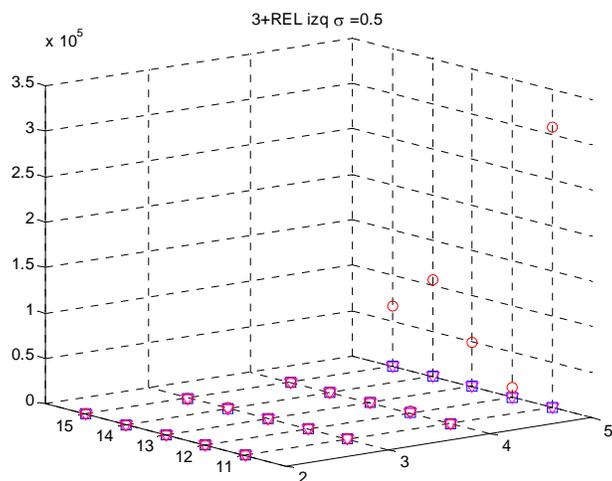


Figura 4.10.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de 3+REL, con ruido añadido, cámara izquierda.

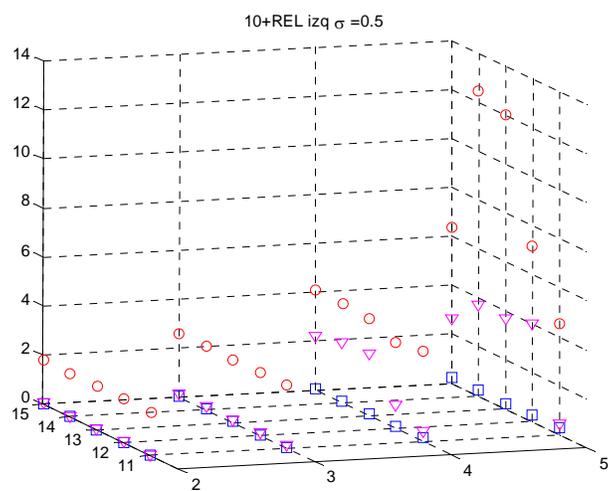


Figura 4.11.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de 10+REL con ruido añadido, cámara izquierda.

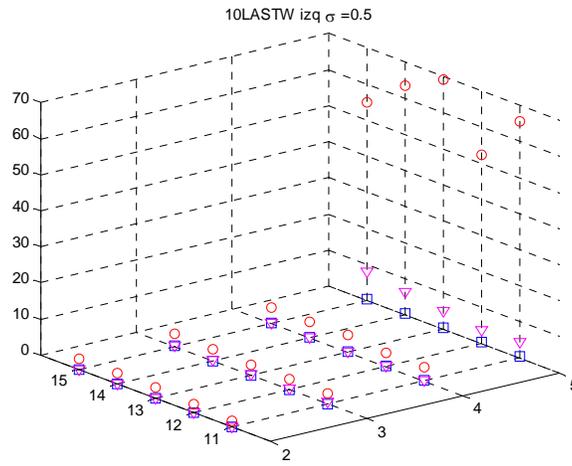


Figura 4.12.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de 10LASTW, con ruido añadido, cámara izquierda.

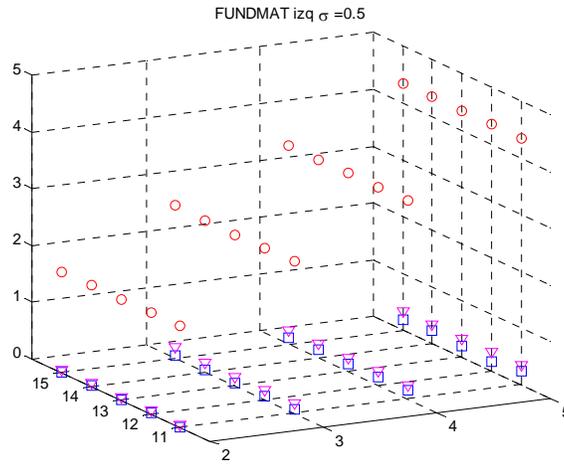


Figura 4.13.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de FUNDMAT con ruido añadido, cámara izquierda.

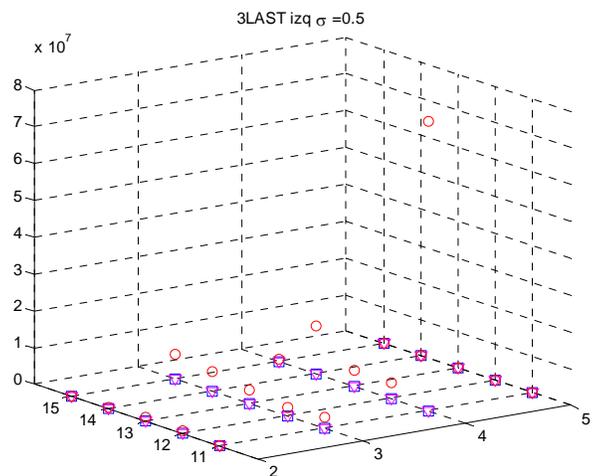


Figura 4.14.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de 3LAST, con ruido añadido, cámara izquierda.

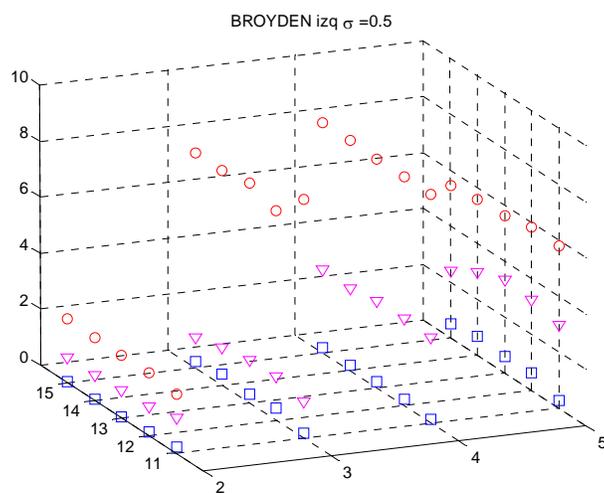


Figura 4.15.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de BROYDEN, con ruido añadido, cámara izquierda.

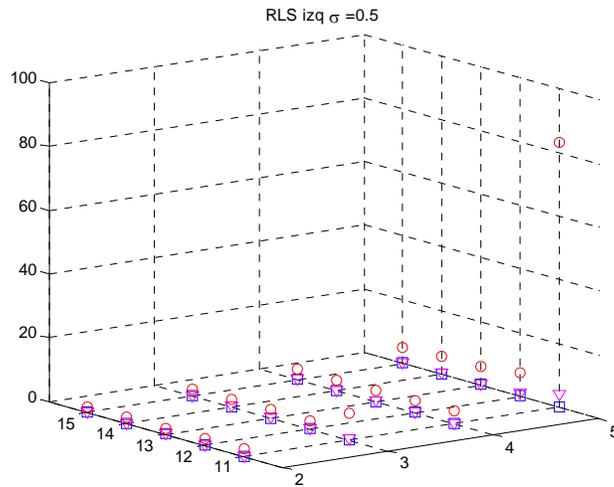


Figura 4.16.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de RLS, con ruido añadido, cámara izquierda.

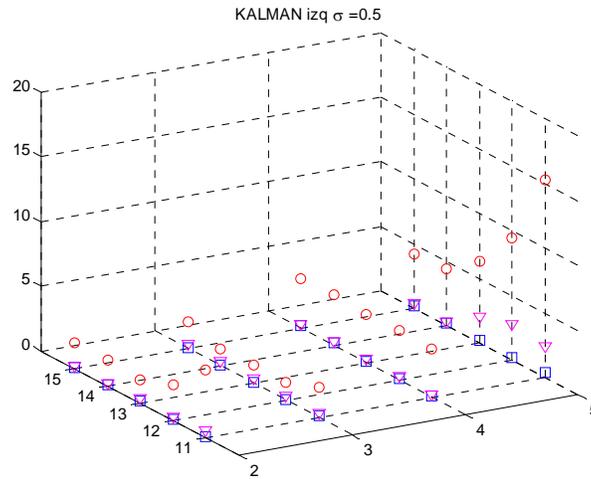


Figura 4.17.- Valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  estimando  $\mathbf{J}$  con el algoritmo de KALMAN, con ruido añadido, cámara izquierda.

Se observa que los algoritmos 3LAST y 3+REL muestran algún valor singular muy distorsionado en el caso sin ruido añadido, generando una gráfica no uniforme de difícil lectura. Este comportamiento se magnifica en el caso con ruido, se considera por lo tanto estos dos algoritmos como de menor calidad. Algunos algoritmos presentan un buen comportamiento en el caso sin ruido, mientras que con ruido añadido decae su comportamiento, es el caso de los métodos BROYDEN, KALMAN y 10+REL. Un caso especial es el método RLS que en el caso con ruido mantiene su buen comportamiento a no ser por un valor singular en la posición once. Se observa que FUNDMAT mantiene su buen comportamiento tanto en el caso sin ruido como con ruido.

#### 4.10 CONCLUSIONES.

A partir de los resultados mostrados en las gráficas de los valores singulares de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  para los diferentes algoritmos de estimación del jacobiano de la imagen, y considerando como un índice de la calidad del algoritmo implementado, la uniformidad de los valores singulares, se destacan las siguientes conclusiones.

En condiciones sin ruido añadido, se observa muy claramente que el algoritmo con mejor comportamiento es FUNDMAT. Entre los que poseen comportamiento intermedio se tienen 10+REL, 10LASTW, BROYDEN, RLS y KALMAN. Y los de pésimo comportamiento se tienen a 3LAST y 3+REL.

En condiciones con ruido añadido, se observa que algunos algoritmos se degradan como por ejemplo 10+REL, BROYDEN, y 10LASTW, en menor medida KALMAN, y sólo para una de las posiciones RLS. Debe resaltarse que en estas condiciones FUNDMAT mantiene su comportamiento como en el caso sin ruido añadido.

Lo descrito anteriormente es válido tanto para la cámara izquierda como para la cámara derecha.

Esto debe considerarse como una primera etapa en la evaluación de los diferentes algoritmos de estimar el jacobiano, en el capítulo cinco se evaluará su comportamiento en tareas de control.

# CAPITULO 5

## 5 TAREAS DE CONTROL.

El problema de control se considera como una regulación de la función de error  $\mathbf{e}(\mathbf{q}, t)$  en lazo cerrado (Figura 5.1).

En control visual basado en imagen, la función de error se genera directamente en el espacio 2D de la imagen, siendo de uso generalizado realizar un control en función de la tarea [160] [47]. Esta estrategia cumple con los siguientes puntos:

- La tarea de control se expresa como una regulación a cero de una función de error  $\mathbf{e}(\mathbf{q}, t)$  a partir de una posición de inicio  $\mathbf{q}_0$ , donde la función de error  $\mathbf{e}(\mathbf{q}, t)$  es la diferencia entre las características deseadas (o de referencia)  $\mathbf{s}^*(t)$  y las actuales  $\mathbf{s}(\mathbf{q})$ :

$$\mathbf{e}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{s}^*(t) - \mathbf{s}(\mathbf{q}) \quad (5.1)$$

- La ley de control es proporcional.
- Se asegura que la función de error  $\mathbf{e}$  posea un decaimiento exponencial al cumplir que:

$$\dot{\mathbf{e}} = -\lambda \mathbf{e} \quad (5.2)$$

donde  $\lambda > 0$  es una constante que regula la velocidad de convergencia.

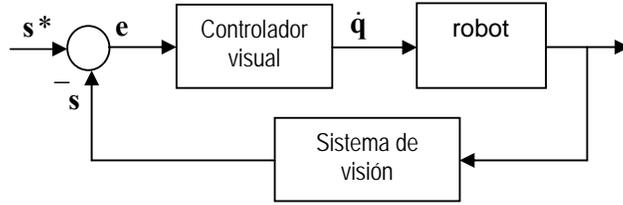


Figura 5.1.- Esquema de control basado en características.

## 5.1 LEY DE CONTROL ESTÁTICA.

En la función de error (5.1) la característica de referencia  $s^*(t)$  es constante en cada intervalo de regulación, por lo que la función de error sólo depende del valor de las características actuales, la función de error se puede reescribir como:

$$e = s^* - s \quad (5.3)$$

derivando (5.3) considerando  $\dot{s}^* = 0$  y el modelo lineal de (4.13), se tiene:

$$\dot{e} = -\dot{s} = -\mathbf{J}\dot{q} \quad (5.4)$$

reemplazando (5.2) en (5.4) y eliminando signos:

$$\mathbf{J}\dot{q} = \lambda e = \lambda(s^* - s) \quad (5.5)$$

Se sabe que la dimensión del jacobiano  $\mathbf{J}$  es  $m \times n$  donde  $m$  es el número de características y  $n$  es el número de articulaciones. Según se tenga  $m = n$ ,  $m > n$  ó  $m < n$  se tienen tres casos [85]:

- $m = n$ : en este caso  $\mathbf{J}$  es cuadrada, por lo que su inversa existe siempre que  $\det(\mathbf{J}) \neq 0$ , y la solución a la ecuación (5.5) es

$$\dot{q} = \lambda \mathbf{J}^{-1}(s^* - s) \quad (5.6)$$

- $m > n$ : se tienen mayor número de características que articulaciones, en este caso la inversa no existe, pero se supone que  $\mathbf{J}$  es de rango completo, es decir:  $\text{rank}(\mathbf{J}) = \min(m, n)$ , y la solución a (5.5) debe hacerse a través de una minimización, (aproximación a la solución con el error más pequeño posible). Como el sistema es lineal, esta solución puede encontrarse por el método de mínimos cuadrados, (es decir se halla una solución para  $\dot{q}$  que minimice la norma  $\|\lambda(s^* - s) - \mathbf{J}\dot{q}\|$ ) y tiene la forma:

$$\dot{q} = \lambda \mathbf{J}^+(s^* - s) \quad (5.7)$$

Donde  $\mathbf{J}^+$  es la pseudoinversa de  $\mathbf{J}$  definida como:

$$\mathbf{J}^+ = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \quad (5.8)$$

- $m < n$ : significa que no están siendo observadas suficientes características para determinar una única posición de  $\dot{\mathbf{q}}$ , y por lo tanto se tendrán infinitas soluciones a (5.5) [166]. La solución en este caso tiene la forma:

$$\dot{\mathbf{q}} = \lambda \mathbf{J}^+ (\mathbf{s}^* - \mathbf{s}) + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \mathbf{b} \quad (5.9)$$

solución que consta de dos términos, el primero de ellos relativo a la solución mínima de las velocidades de las articulaciones, donde  $\mathbf{J}^+$  es la pseudoinversa derecha de  $\mathbf{J}$  definida como:

$$\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \quad (5.10)$$

el segundo término denominado solución homogénea intenta satisfacer restricciones adicionales, donde  $\mathbf{b}$  es un vector arbitrario de dimensión adecuada. En este caso todos los vectores de la forma  $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \mathbf{b}$  son una proyección de  $\mathbf{b}$  en el espacio nulo de  $\mathbf{J}$  y corresponden a aquellos componentes de las características del objeto que no son observados.

El espacio nulo del jacobiano de la imagen juega un papel importante en métodos híbridos, donde algunos grados de libertad son controlados por control visual y los restantes por alguna otra modalidad [85].

Se debe hacer notar que el caso  $m = n$  corresponde a sólo tres puntos en la imagen (caso general de  $n = 6$ ) utilizados para realizar el control, en esta situación existen algunas configuraciones en que  $\mathbf{J}$  se hace singular [130] con el consiguiente fallo en la tarea de control, por lo que en control visual es más generalizado el control bajo el caso  $m > n$ , además de mejorar el funcionamiento del sistema [92].

En las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.9),  $\mathbf{J}$  corresponde a un jacobiano estimado, por lo que en su notación estrictamente hablando debería escribirse como  $\hat{\mathbf{J}}^{-1}$  ó  $\hat{\mathbf{J}}^+$ .

### 5.1.1 ANALISIS DE ESTABILIDAD.

Si elegimos una función candidata de Lyapunov de la forma [47]:

$$L = 1/2 \|\mathbf{e}(\mathbf{q}, t)\|^2 \quad (5.11)$$

considerando la ecuación (5.4) y la ecuación (5.7) (caso general de  $m > n$ ) y usandola notación  $\hat{\mathbf{J}}$  para el jacobiano de la imagen estimado, se tiene:

$$\dot{L} = \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}} = -\lambda \mathbf{e}^T \mathbf{J} \hat{\mathbf{J}}^+ \mathbf{e} \quad (5.12)$$

en esta ecuación aseguramos que  $\dot{L}$  sea definida negativa si se cumple que

$$\mathbf{J} \hat{\mathbf{J}}^+ > 0 \quad (5.13)$$

llamada condición de positividad, que caracteriza una robustez de la tarea a incertidumbres y aproximaciones [160]. En el mejor de los casos  $\mathbf{J} \hat{\mathbf{J}}^+ = \mathbf{I}$  y se asegura una estabilidad asintótica, esto se comprueba remplazando (5.7) (representando  $\mathbf{J}^+$  por  $\hat{\mathbf{J}}^+$ ) en (5.4) y comparando con (5.2) [64].

Además de realizar una correcta estimación de  $\hat{\mathbf{J}}^+$  (caso  $m > n$ ), y puesto que el rango de  $\mathbf{J}$  y  $\hat{\mathbf{J}}^+$  es a lo mucho  $n$ ,  $\mathbf{J} \hat{\mathbf{J}}^+$  tiene un espacio nulo no trivial, y las configuraciones de  $\mathbf{e}$  tal que  $\mathbf{e} \in \text{Ker} \hat{\mathbf{J}}^+$  corresponden a un mínimo local. Consecuentemente en IBVS sólo se puede obtener una estabilidad asintótica local [25].

## 5.2 LEY DE CONTROL DINÁMICA.

De la expresión (5.1), derivando con respecto al tiempo:

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{q}, t) = \dot{\mathbf{s}}^*(t) - \dot{\mathbf{s}}(\mathbf{q}) \quad (5.14)$$

considerando (5.2) y además el modelo lineal de (4.13) que supone un jacobiano de la imagen no singular a lo largo de la trayectoria, se tiene:

$$-\lambda \mathbf{e}(\mathbf{q}, t) = \dot{\mathbf{s}}^*(t) - \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.15)$$

acomodando términos y suponiendo el caso donde  $m > n$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+ (\lambda \mathbf{e}(\mathbf{q}, t) + \dot{\mathbf{s}}^*(t)) \quad (5.16)$$

donde  $\dot{\mathbf{s}}^*(t)$  representa la velocidad del objeto en movimiento, y corresponde al elemento predictivo.

## 5.3 EXPERIMENTOS Y RESULTADOS.

Se describen los experimentos realizados para validar los algoritmos propuestos y se muestran los resultados obtenidos. Las pruebas se han llevado a cabo comparando el desempeño de los distintos algoritmos de estimación del jacobiano de la imagen, frente a:

- número de puntos considerados del objeto de control: desde dos hasta cinco.

*Tareas de Control.*

- ruido gaussiano artificialmente añadido en la detección de características: sin ruido añadido (en adelante simplemente sin ruido), con ruido añadido.
- Caso estático (tarea de posicionamiento).
- Caso dinámico (tarea de seguimiento).

Para tal fin se han definido unos índices (ver apartado 5.3.2) que evalúan el comportamiento de los algoritmos, dando una estimación de los errores en características de la imagen y errores en articulaciones, del tiempo promedio de establecimiento y de su sobreoscilación, así como del tiempo de procesamiento que requiere cada algoritmo. El comportamiento de todos los algoritmos se muestra en gráficas 2D que representan índices VS número de puntos considerados en el control; también se presentan gráficos 3D que muestran la trayectoria seguida en el espacio articular. En las pruebas con ruido añadido, el ruido añadido es de tipo gaussiano con un valor de  $\sigma = 0.5$ .

### 5.3.1 ENTORNO DE PRUEBAS.

Es el mismo que el descrito en el capítulo 3, en el último eslabón del sistema articular se ha colocado solidario a éste, un patrón de cinco puntos negros sobre fondo blanco (

Figura 3.20 y Figura 3.21), el cual constituirá el objeto de control del sistema. Los centros de gravedad de cada uno de los puntos del patrón corresponderán a las características visuales a detectar. Asimismo, se han realizado pruebas considerando en el sistema de control, desde dos hasta cinco puntos del patrón. El esquema general de control se muestra en la

Figura 5.2.

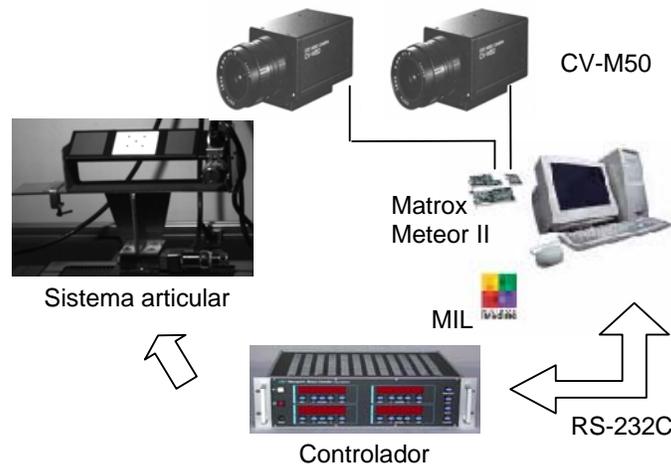


Figura 5.2.- Esquema general de control.

### 5.3.2 INDICES DE EVALUACIÓN.

A fin de evaluar el comportamiento de los algoritmos propuestos, se han definido seis índices cuya definición se detalla:

- **Índice 0:** Suma de las distancias euclídeas entre la posición actual y la de referencia en el plano de la imagen, ponderada por el número de puntos, el número de cámaras y el número de trayectorias (entendiendo como tales el trayecto desde una posición inicial hasta otra de referencia). Da una medida del error en características (expresado en píxeles).
- **Índice 1:** Suma de las distancias euclídeas entre las posiciones alcanzadas consecutivamente en el espacio articular, ponderada por el número de trayectorias. Mide la distancia recorrida en unidades articulares.
- **Índice 2:** Media del número de movimientos en los que la salida se ha estabilizado para cada trayectoria. Se considera que la salida se ha estabilizado cuando el error entre las características actuales y las de referencia es menor que una cierta tolerancia: se ha escogido un valor de 0.6 píxeles. Este índice da una medida del tiempo de establecimiento del sistema.
- **Índice 3:** Suma de las distancias euclídeas en el plano de la imagen con sobreoscilación, ponderada por el número de puntos, el número de cámaras y el número de trayectorias. El concepto de sobreoscilación en el plano de la imagen se representa en la (Figura 5.3): donde se grafica una trayectoria con sobreoscilación, en el punto final de esta trayectoria, se traza una recta perpendicular a la línea que une este punto y el punto de inicio. Se considera que cuando la trayectoria sobrepasa esta recta el sistema está sobreoscilando, y se mide esta sobreoscilación como la suma de las distancias de cada movimiento sobreoscilante a la mencionada recta (expresado en píxeles)
- **Índice 4:** Tiempo medio de cálculo del jacobiano en milisegundos.
- **Índice 5:** Se ha definido un sexto índice para el caso dinámico (seguimiento) como la suma de las distancias euclídeas entre la posición de referencia y la actual en el espacio articular, ponderada por el número de movimientos. Da una medida del error en posición (expresado en unidades articulares). No tiene sentido definir este índice para el caso estático debido a que en este caso es necesario más de un movimiento para alcanzar cada posición de referencia.

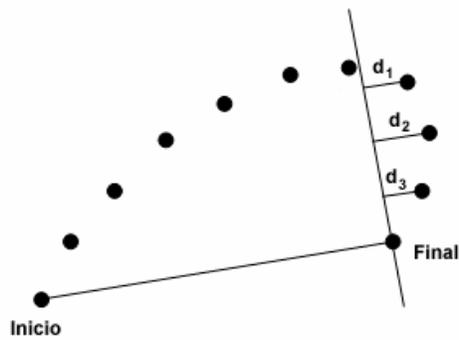


Figura 5.3.- Trayectoria con sobreoscilación. El índice 3 mide las distancias  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$ .

### 5.3.3 ESPACIO DE TRABAJO.

El espacio de trabajo está definido en la (Tabla 5.1), donde las unidades son milésimas de milímetro para la primera articulación y de milésimas de grado para la segunda y tercera articulaciones. Dentro del espacio delimitado por estos valores en articulaciones, se garantiza una correcta detección de las características visuales.

Tabla 5.1.- Espacio de trabajo del sistema articular

ARTICULACIÓN	LÍMITE INFERIOR	LÍMITE SUPERIOR
1*	-30000	30000
2**	-30000	30000
3**	5000	70000

\* milésimas de mm.

\*\* milésimas de grado.

### 5.3.4 CASO ESTÁTICO.

Debido a la dependencia que presenta el Jacobiano con respecto a las características visuales y al punto en la espacio articular, se ha optado por encadenar un elevado número de trayectorias para obtener resultados más representativos en las pruebas. Esto se ha conseguido generando en forma aleatoria un gran número de posiciones de referencia, en concreto se ha considerado apropiado un número de hasta cincuenta (Figura 5.4.- Posiciones de referencia para el caso estático.Figura 5.4).

Como las posiciones de referencia deben de ser realizables, y considerando que el sistema tiene sólo tres grados de libertad, las características de referencia deben adquirirse en una etapa anterior fuera de línea mediante un procedimiento de “teach by showing” [98][166], por el cual el robot es movido a las posiciones deseadas y sus características visuales correspondientes son almacenadas.

Capítulo 5.

En cada trayectoria se cuantifican los índices de evaluación definidos. Los algoritmos evaluados son los descritos en el capítulo 4 y que se resumen en la Tabla 4.1. Los valores obtenidos para los índices 0, 1, 2, y 3 se muestran en la Tabla 5.2. A partir de esta tabla se han obtenido gráficas para cada uno de los índices (Figura 5.5 a la Figura 5.8). En cada una de estas gráficas se muestra el comportamiento en conjunto de los algoritmos evaluados.

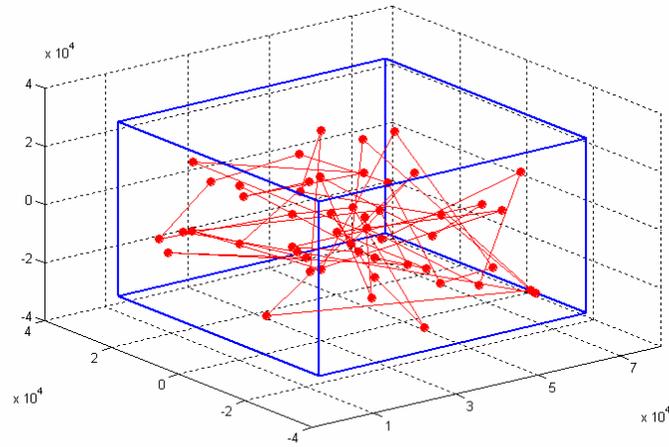


Figura 5.4.- Posiciones de referencia para el caso estático.

Tabla 5.2.- Valores para los 4 índices para los algoritmos considerados sin ruido añadido.

	ALGORITMO	VALORES SIN RUIDO			
		2 PUNTOS	3 PUNTOS	4 PUNTOS	5 PUNTOS
I INDICE 0	3LAST	316	328	298	305
	3+REL	303	338	298	319
	10LASTW	273	285	279	285
	10+REL	265	278	270	275
	FUNDMAT	263	275	270	277
	BROYDEN	262	271	264	271
I INDICE 1*	3LAST	44.1	43.8	43.6	41.5
	3+REL	43.5	44.0	42.6	42.8
	10LASTW	41.0	40.3	39.3	39.0
	10+REL	37.9	37.8	37.3	37.2
	FUNDMAT	38.0	37.5	37.3	37.3
	BROYDEN	37.7	37.3	37.1	36.9
I INDICE 2	3LAST	11.7	11.4	13.5	13.2
	3+REL	10.9	11.3	11.0	11.1
	10LASTW	10.1	10.1	9.8	10.1
	10+REL	9.5	10.0	9.1	9.0
	FUNDMAT	9.4	10.0	9.1	9.0
	BROYDEN	8.7	8.5	8.5	8.4
I INDICE 3	3LAST	1.7	1.8	3.7	1.7
	3+REL	0.8	2.7	2.2	2.2
	10LASTW	1.4	1.3	1.1	1.4
	10+REL	0.9	1.1	0.7	0.5
	FUNDMAT	1.6	0.8	0.7	0.5
	BROYDEN	0.3	0.1	0.2	0.2

\* dividido por 1000

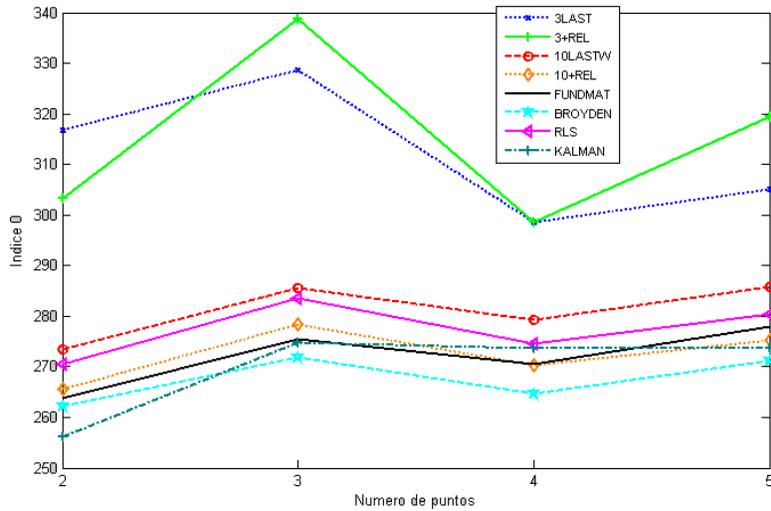


Figura 5.5.- Índice 0 sin ruido.

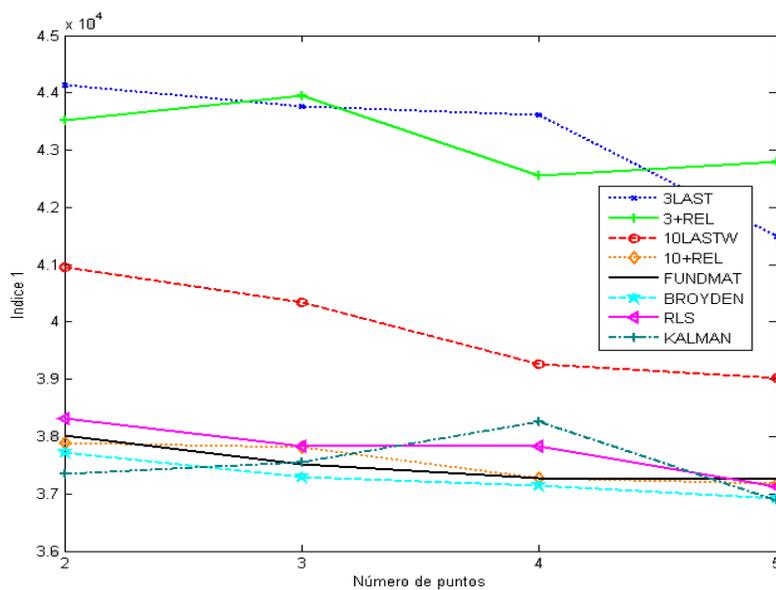


Figura 5.6.- Indice 1 sin ruido.

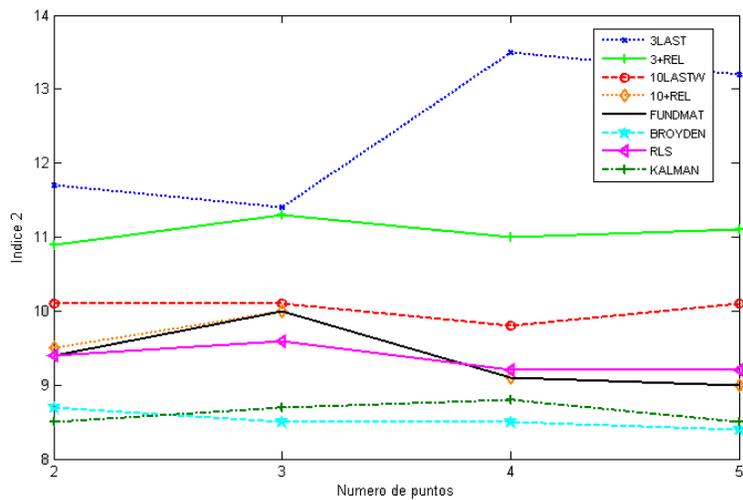


Figura 5.7.- Indice 2 sin ruido.

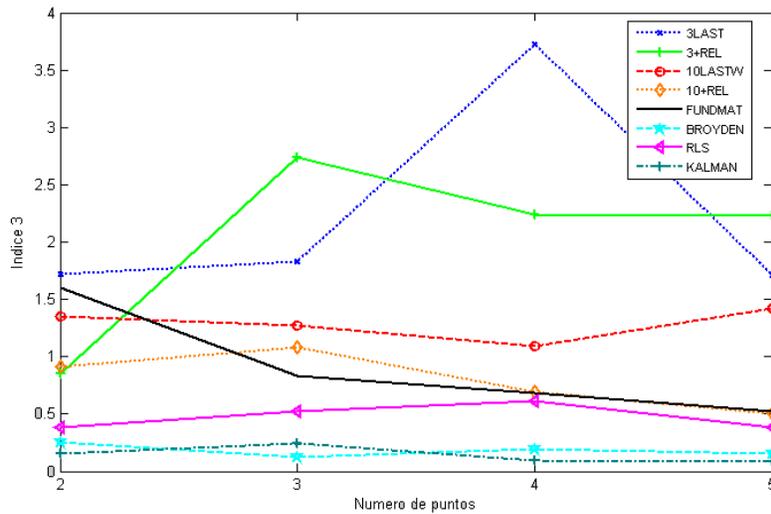


Figura 5.8.- Indice 3 sin ruido.

Se observa que en general 3LAST y 3+REL son los algoritmos que poseen peor comportamiento aunque 10LASTW también puede estar entre este grupo. Los demás algoritmos tienen un comportamiento relativamente similar, destacando como mejores en el índice 0: BROYDEN, KALMAN y FUNDMAT; en el índice 1: BROYDEN y FUNDMAT; en los índices 2 y 3: BROYDEN y KALMAN.

A continuación se muestra una gráfica que muestra el tiempo de procesamiento (índice 4) de cada uno de los algoritmos evaluados.

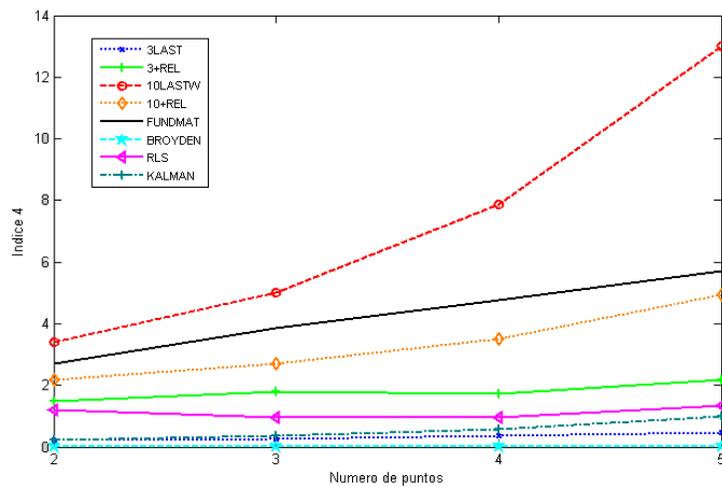


Figura 5.9.- Indice 4: tiempo promedio de estimación del jacobiano

Capítulo 5.

A partir de esta gráfica se ve que el tiempo de procesamiento aumenta con el número de puntos considerados. Tanto BROYDEN como 3LAST consumen menor tiempo de procesamiento, mientras que dentro de los que consumen más tiempo están 10LASTW y FUNDMAT.

Los resultados para las pruebas con ruido añadido se presentan a continuación en la Tabla 5.3:

Tabla 5.3.- Valores para los 4 índices para los algoritmos considerados con ruido añadido.

	ALGORITMO	VALORES CON RUIDO			
		2 PUNTOS	3 PUNTOS	4 PUNTOS	5 PUNTOS
INDICE 0	3LAST	696	644	695	731
	3+REL	519	523	642	671
	10LASTW	348	420	432	467
	10+REL	284	290	286	287
	FUNDMAT	264	281	277	278
	BROYDEN	553	582	590	704
INDICE 1*	3LAST	90.3	77.6	79.3	70.9
	3+REL	75.4	65.1	67.8	71.5
	10LASTW	54.2	52.3	53.4	54.5
	10+REL	44.5	41.5	40.5	40.8
	FUNDMAT	41.7	39.8	40.4	39.9
	BROYDEN	76.4	77.6	70.3	64.7
INDICE 2	3LAST	29.4	29.8	29.8	29.9
	3+REL	26.7	26.1	28.3	28.2
	10LASTW	18.4	20.4	24.0	25.5
	10+REL	20.0	21.3	21.8	22.9
	FUNDMAT	15.2	15.5	17.2	21.4
	BROYDEN	29.3	29.0	29.2	28.9
INDICE 3	3LAST	30.5	31.9	30.9	33.8
	3+REL	18.7	12.9	17.9	19.2
	10LASTW	6.8	4.7	4.4	7.6
	10+REL	3.6	2.9	2.4	2.6
	FUNDMAT	2.3	2.7	3.8	3.1
	BROYDEN	52.9	66.3	56.8	76.9

\* dividido por 1000

A partir de estos valores numéricos se han generado las siguientes gráficas para todos los índices (desde la Figura 5.10 hasta la Figura 5.13):

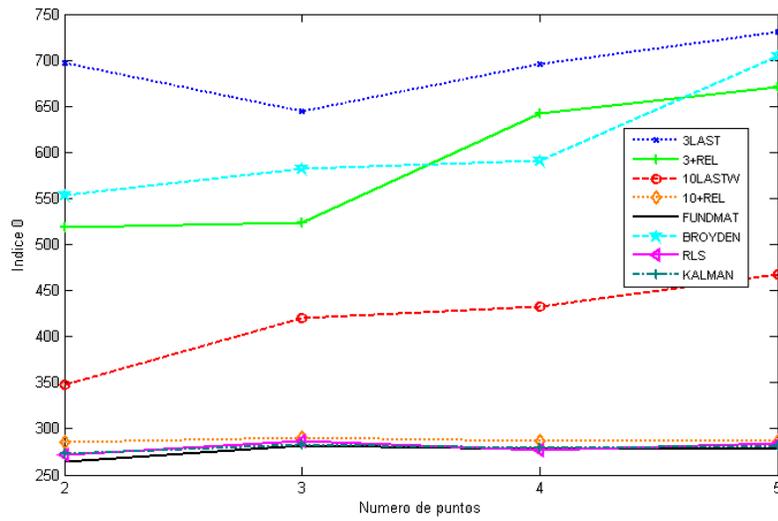


Figura 5.10.- Indice 0 con ruido.

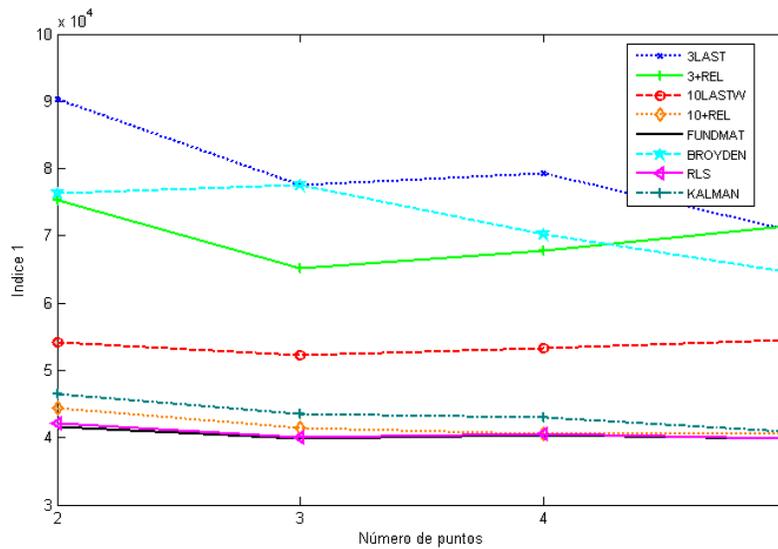


Figura 5.11.- Indice 1 con ruido.

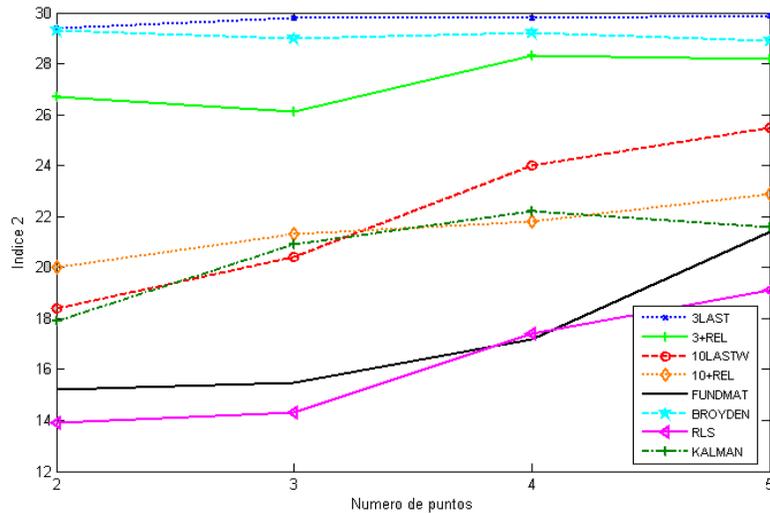


Figura 5.12.- Indice 2 con ruido.

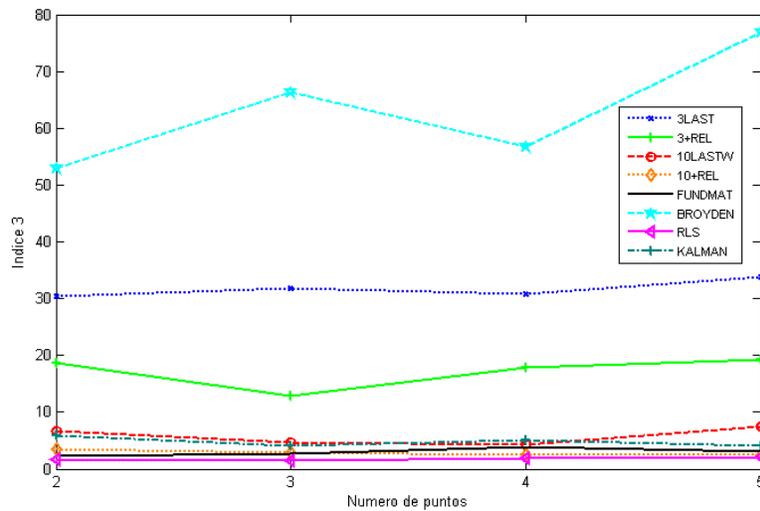


Figura 5.13.- Indice 3 con ruido.

Se ve que con ruido añadido, algunos algoritmos degradan su comportamiento, tales como BROYDEN y 3+REL. Dentro de los que poseen un buen comportamiento frente al ruido se tiene para el índice 0: KALMAN, RLS y FUNDMAT, y para el índice 1, 2 y 3: RLS y FUNDMAT. No se presenta gráfica para el índice 4 (tiempo de procesamiento) con ruido pues es prácticamente la misma que para el caso sin ruido.

A partir de los resultados de las pruebas sin ruido añadido y con ruido añadido, se presentan también gráficas que muestran la relación con ruido/sin ruido (Figura 5.14- Figura 5.17). Estas gráficas dan una idea de la respuesta de cada algoritmo con respecto al ruido:

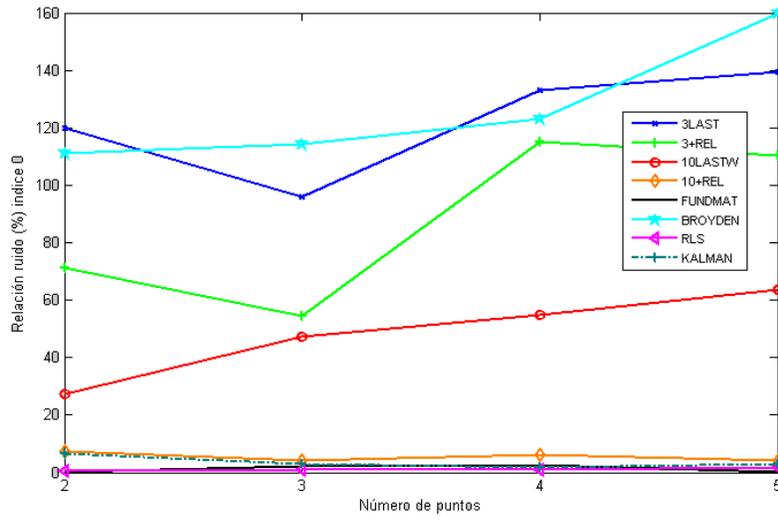


Figura 5.14.- Relación con/sin ruido para el índice 0

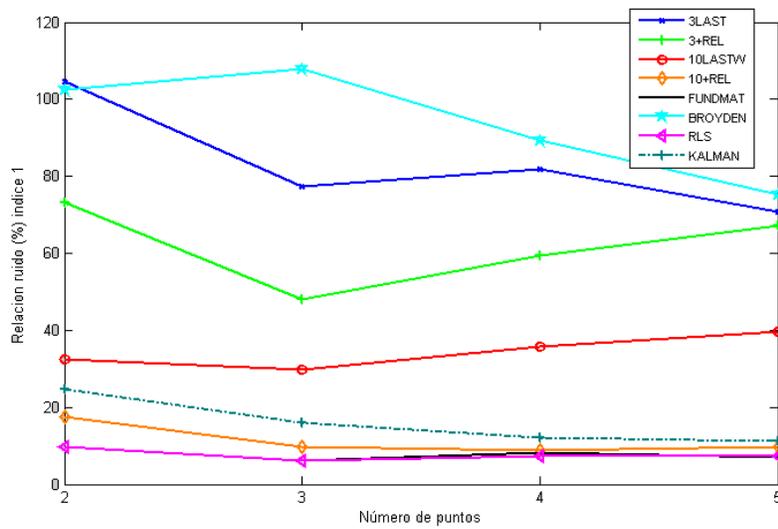


Figura 5.15.-Relación con/sin ruido para el índice 1

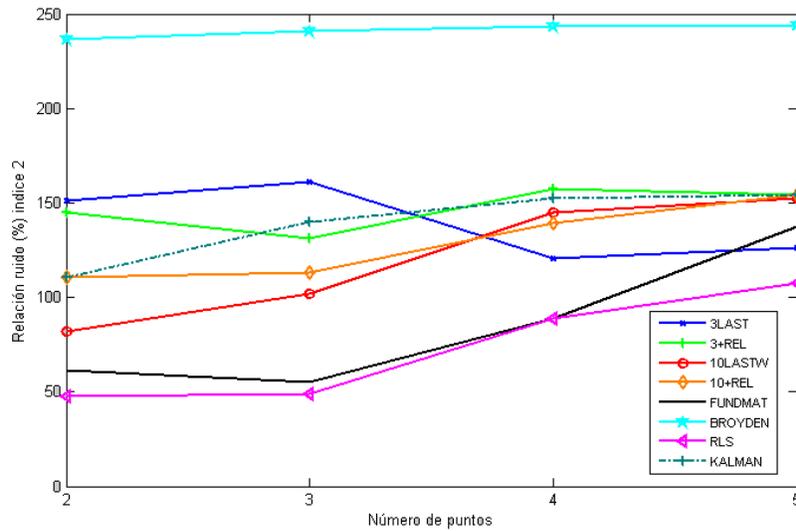


Figura 5.16.-Relación con/sin ruido para el índice 2

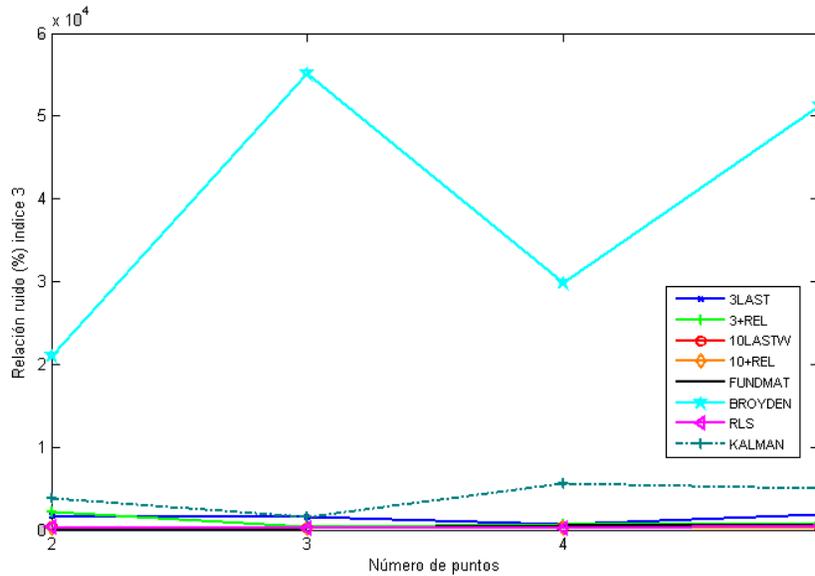
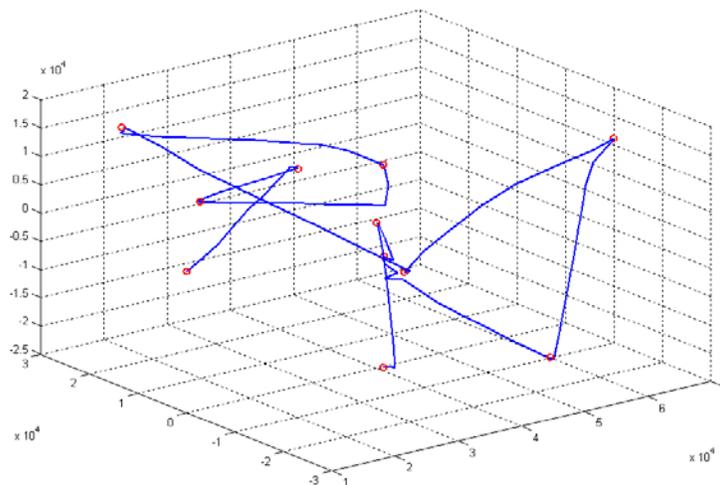


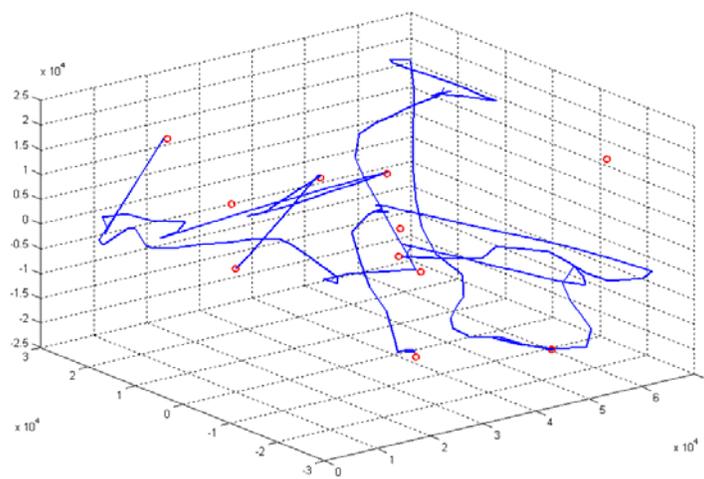
Figura 5.17.-Relación con/sin ruido para el índice 3

Estas gráficas corroboran las observaciones hechas anteriormente. Se observa una clara medida de la degradación de BROYDEN para todos los índices, y muestra también la robustez de RLS y FUNDMAT.

A continuación se presentan gráficas 3D que muestran la evolución (evolución en azul, puntos de referencia en rojo) de los algoritmos en el espacio articular, del mismo modo se muestran los casos sin ruido añadido y con ruido añadido.

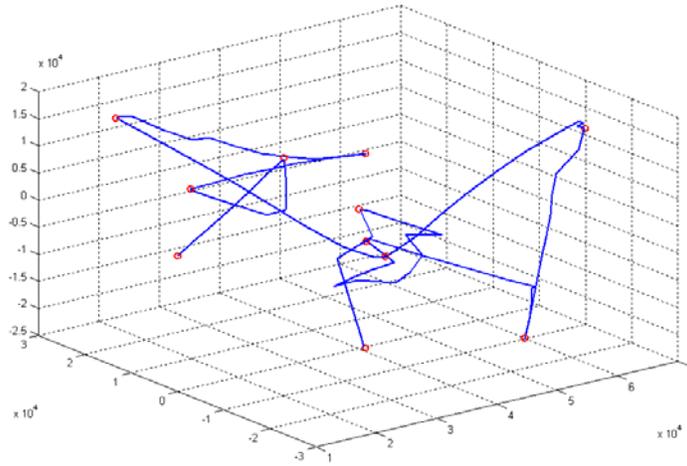


a) sin ruido

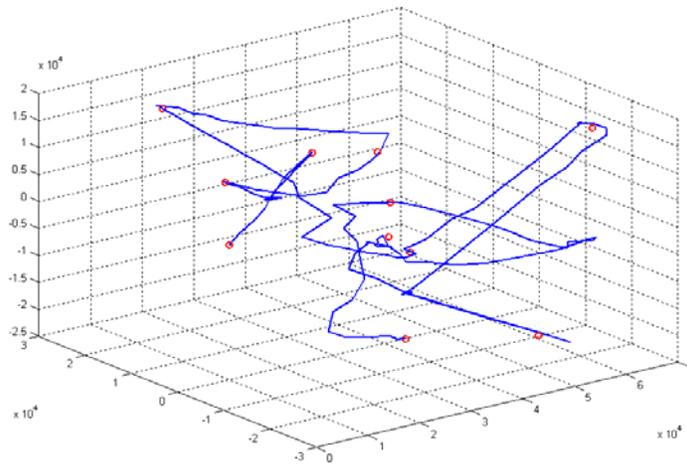


b) con ruido

Figura 5.18.- Evolución articular para el algoritmo 3LAST

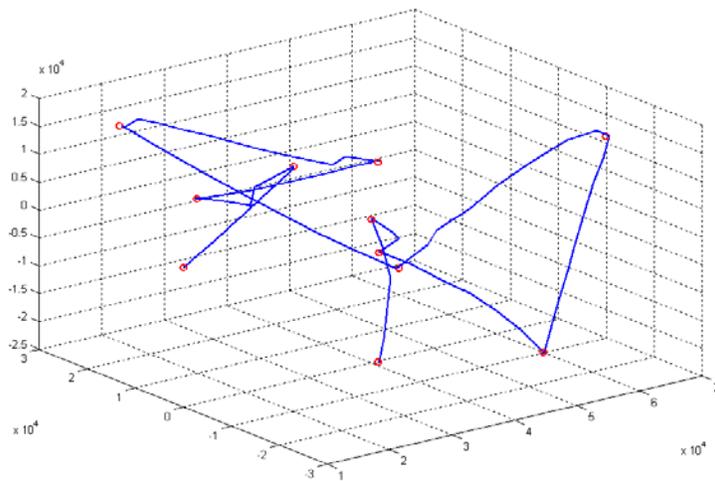


a) sin ruido

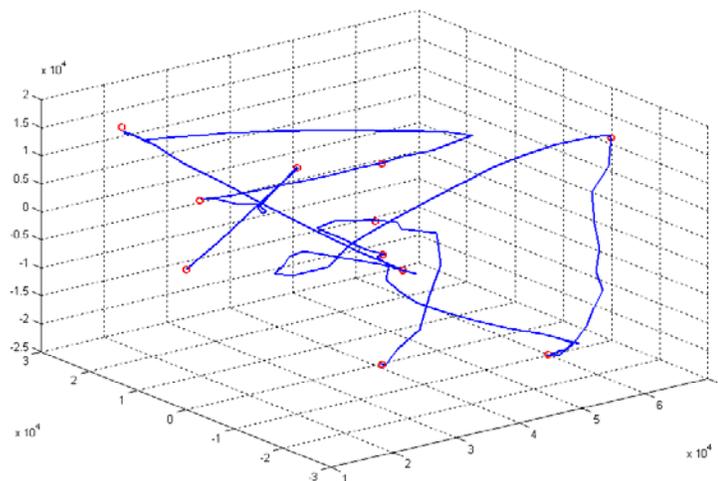


b) con ruido

Figura 5.19.- Evolución articular para el algoritmo 3+REL

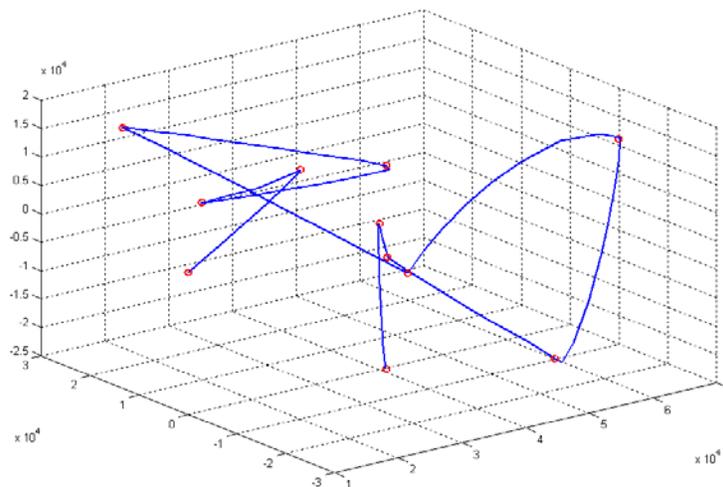


a) sin ruido

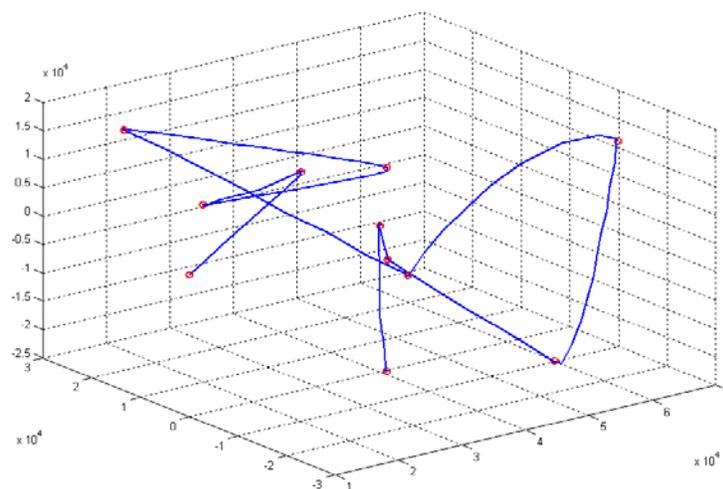


b) con ruido

Figura 5.20.- Evolución articular para el algoritmo 10LASTW

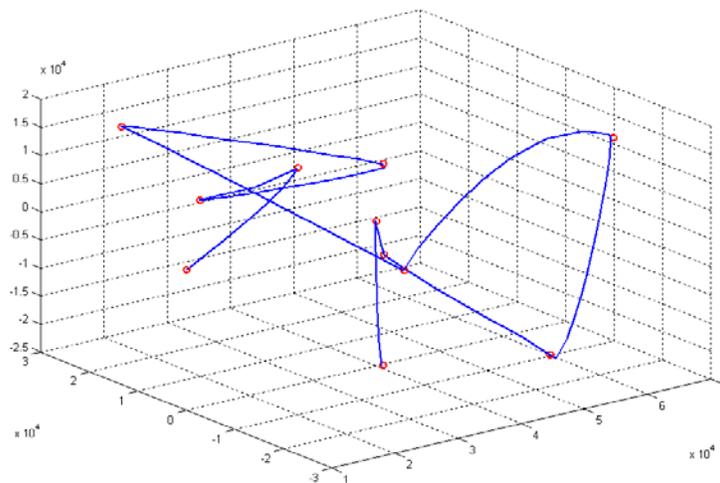


a) sin ruido

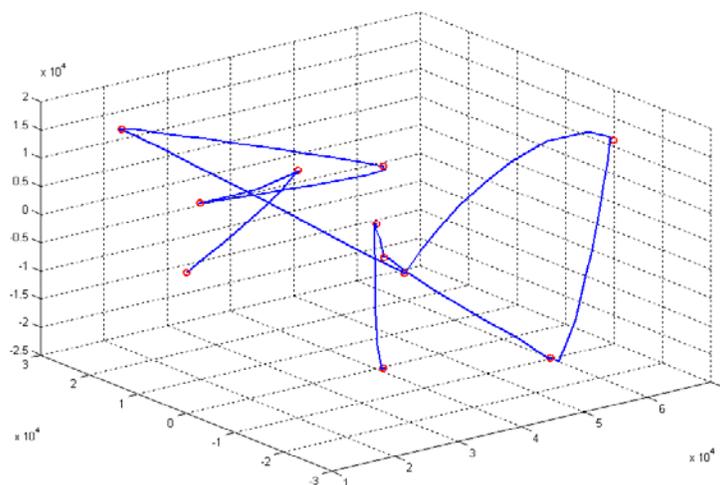


b) con ruido

Figura 5.21.- Evolución articular para el algoritmo 10+REL

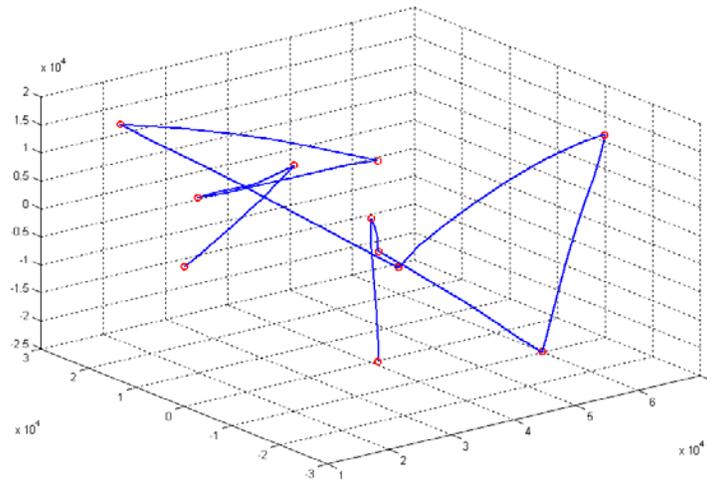


a) sin ruido

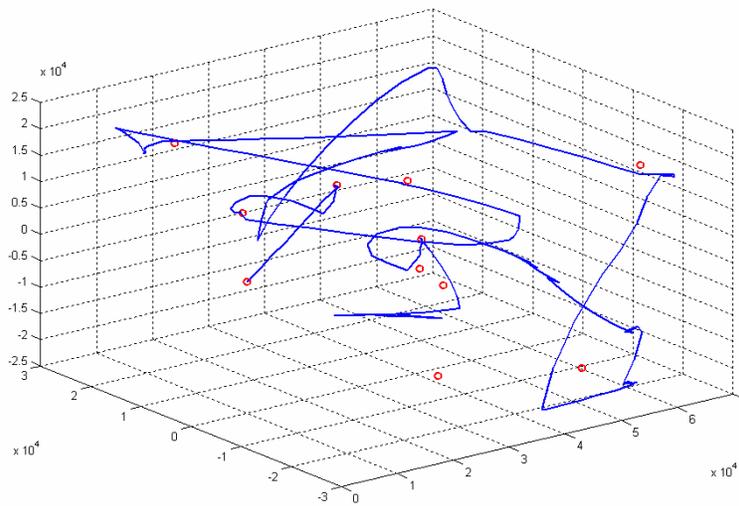


b) con ruido

Figura 5.22.- Evolución articular para el algoritmo FUNDMAT

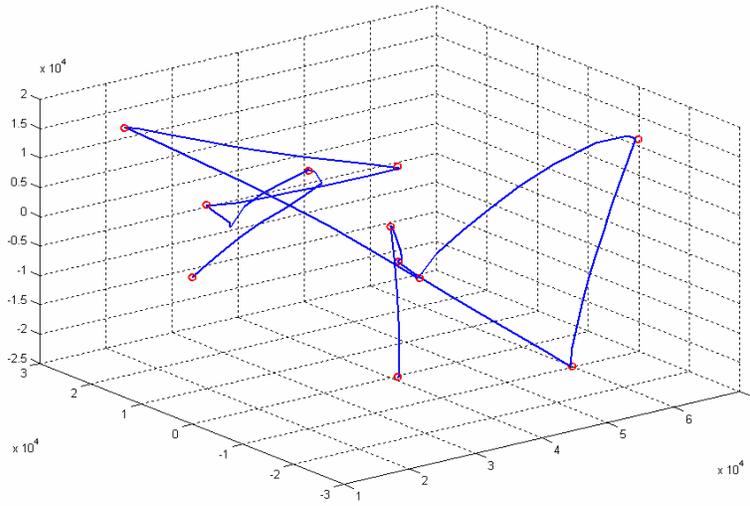


a) sin ruido

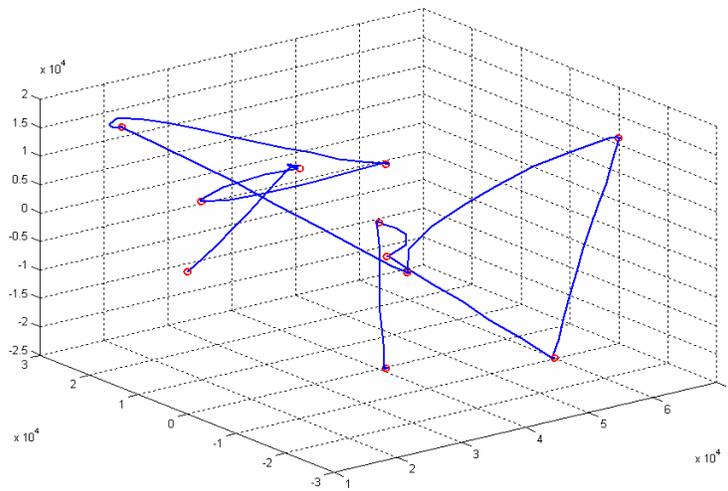


b) con ruido

Figura 5.23.- Evolución articular para el algoritmo BROYDEN

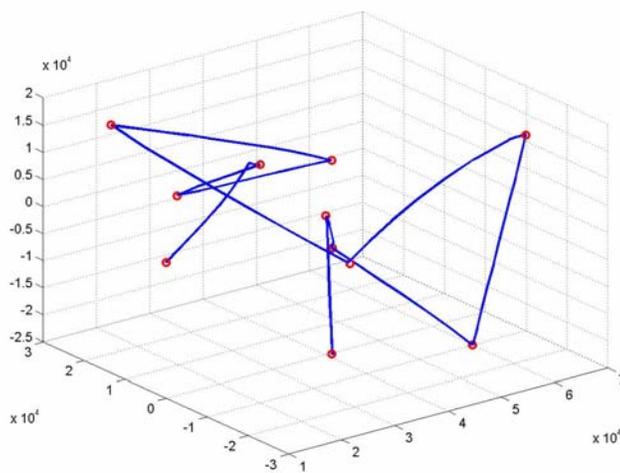


a) sin ruido

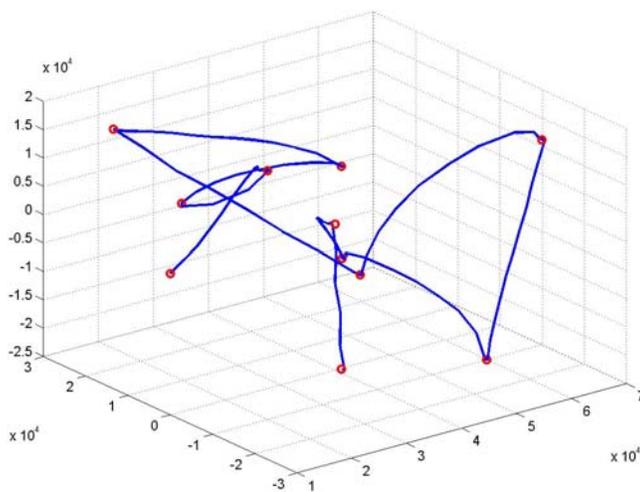


b) con ruido

Figura 5.24.- Evolución articular para el algoritmo RLS



a) sin ruido



b) con ruido

Figura 5.25.- Evolución articular para el algoritmo KALMAN

A partir de las gráficas anteriores se puede observar un degradamiento de la trayectoria al añadirse ruido para 3LAST y BROYDEN. 3+REL no presenta una trayectoria aceptable ni para el caso sin ruido ni con ruido añadido, a diferencia de 10LASTW que presenta una trayectoria medianamente aceptable para ambos casos. Los algoritmos que presentan un buen comportamiento tanto sin ruido como con ruido son 10+REL, FUNDMAT, y RLS, aunque en este grupo también se podría incluir a KALMAN.

Tareas de Control.

Considerando los resultados en articulaciones y los resultados para los índices de evaluación, se observa que los algoritmos que tienen un mejor comportamiento tanto para el caso sin ruido añadido como con ruido añadido, son FUNDMAT y RLS. Basado en esta última aseveración, se realizaron pruebas adicionales con estos dos algoritmos, consistiendo en incrementar el nivel de ruido añadido hasta un valor de  $\sigma = 1$  píxeles. Los resultados obtenidos, se muestran a continuación.

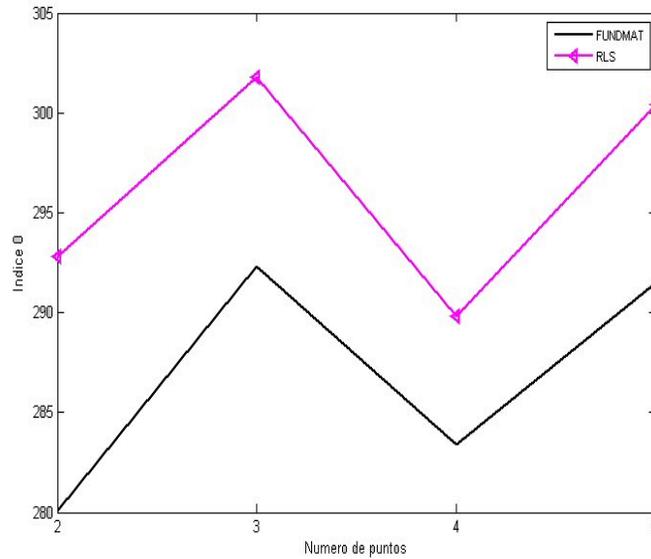


Figura 5.26.-Indice 0 con ruido gaussiano de  $\sigma = 1$  para FUNDMAT y RLS

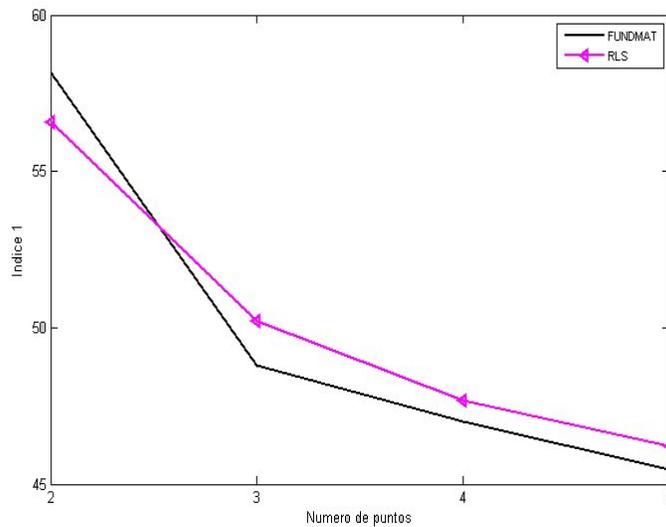


Figura 5.27.-Indice 1 con ruido gaussiano de  $\sigma = 1$  para FUNDMAT y RLS

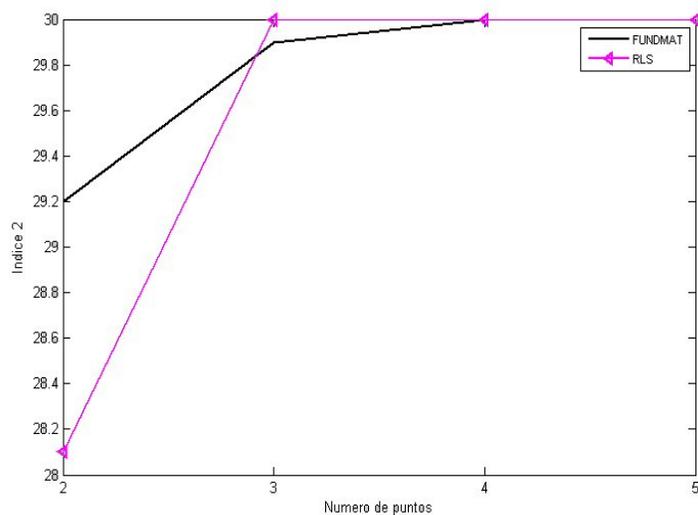


Figura 5.28.- Indice 2 con ruido gaussiano de  $\sigma = 1$  para FUNDMAT y RLS

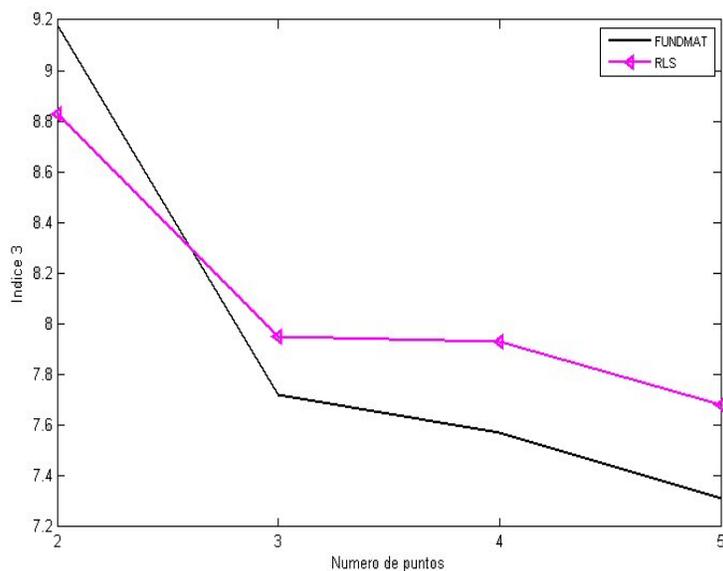


Figura 5.29.- Indice 3 con ruido gaussiano de  $\sigma = 1$  para FUNDMAT y RLS

Para el índice 0 se observa claramente un mejor comportamiento de FUNDMAT frente a RLS, para los otros índices RLS mejora a FUNDMAT sólo en el caso de las pruebas hechas considerando dos puntos del patrón, mientras que para mayor número de puntos el funcionamiento de FUNDMAT es mucho mejor que RLS.

*Tareas de Control.*

Las gráficas en el espacio articular para estos dos algoritmos se presentan a continuación:

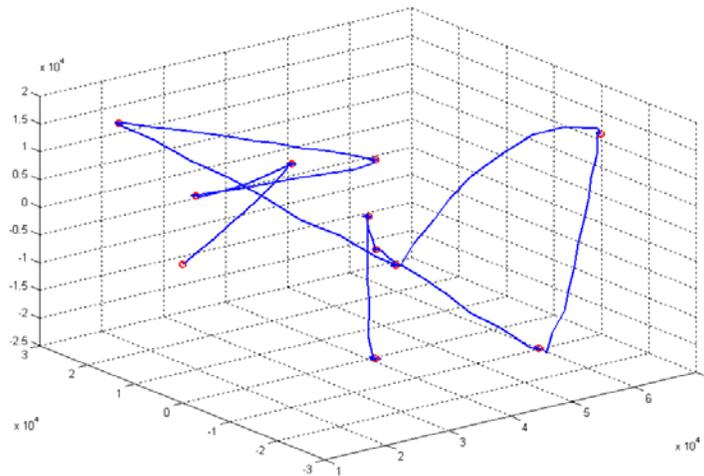


Figura 5.30.- Evolución articular para FUNDMAT con ruido de  $\sigma = 1$

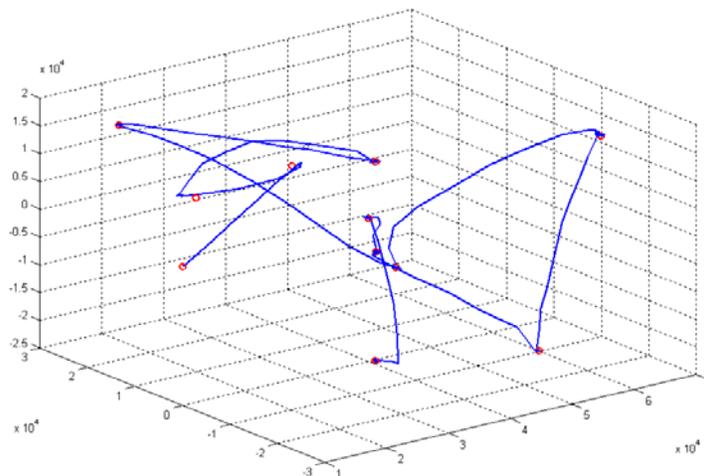


Figura 5.31.- Evolución articular para RLS con ruido de  $\sigma = 1$

Ambas trayectorias en el espacio articular se comportan aceptablemente, pero se puede observar un trayectoria más suave para FUNDMAT.

Considerando además las gráficas para los índices, se puede decir que FUNDMAT posee un mejor comportamiento que RLS para el caso con ruido añadido de  $\sigma = 1$ .

### 5.3.5 CASO DINÁMICO.

Es una tarea de seguimiento, donde las referencias a seguir forman una trayectoria con forma de curva alabeada (

Figura 5.32) la cual se construye con parámetros aleatorios utilizando la ecuación (5.17). Se ha elegido este tipo de curva pues garantiza una continuidad en su trayectoria con variación de velocidad y aceleración.

Al igual que en el caso estático, para obtener resultados más representativos en el presente estudio, se ha optado por encadenar un elevado número de trayectorias, donde las referencias se han obtenido por el método de “teach-by- showing”.

Sólo se evalúan los índices 0 y 5 (sumatoria de errores en características y errores en articulaciones respectivamente), ya que el índice 1 (sumatoria de los movimientos en el espacio articular) no garantiza una correcta evolución del robot, y los índices 2 y 3 (número de movimientos de establecimiento y trayectoria con sobreoscilación) no tienen sentido en el caso dinámico al no haber movimientos intermedios entre una referencia y la siguiente. No se muestran tampoco los resultados para el índice 4 (tiempo medio de estimación del jacobiano), ya que éste presenta los mismos resultados que en el caso estático.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^2 \\ \theta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

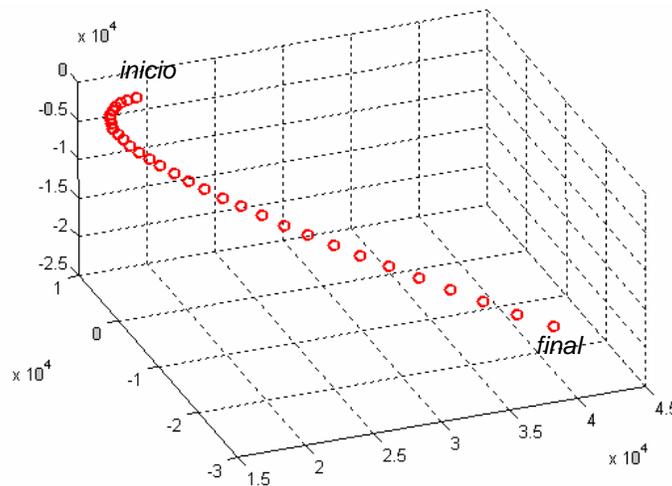


Figura 5.32.- Trayectoria a seguir para el caso dinámico.

Resultados para los índices evaluados en el caso sin ruido añadido se muestra en la tabla siguiente (Tabla 5.4):

Tabla 5.4.- Valores de los índices para los algoritmos considerados en pruebas sin ruido añadido.

	ALGORITMO	VALORES SIN RUIDO			
		2 PUNTOS	3 PUNTOS	4 PUNTOS	5 PUNTOS
I INDICE 0	3LAST	16.6	17.9	18.6	18.5
	3+REL	16.8	18.2	18.0	17.8
	10LASTW	16.5	17.5	17.9	17.7
	10+REL	16.5	17.7	17.9	17.7
	FUNDMAT	16.5	17.5	17.7	17.6
	BROYDEN	16.4	18.2	18.7	17.8
	RLS	16.5	17.7	18.1	17.7
	KALMAN	16.0	17.3	17.7	17.6
I INDICE 5*	3LAST	0.77	0.98	1.84	0.99
	3+REL	0.94	0.67	0.58	0.41
	10LASTW	0.59	0.33	0.39	0.34
	10+REL	0.46	0.69	0.53	0.37
	FUNDMAT	0.42	0.50	0.38	0.29
	BROYDEN	0.38	0.80	1.60	0.45
	RLS	0.50	0.43	0.58	0.34
	KALMAN	0.21	0.42	0.62	0.56

\* dividido por 1000

A partir de esta tabla se consiguen las gráficas siguientes para los índices 0 y 5:

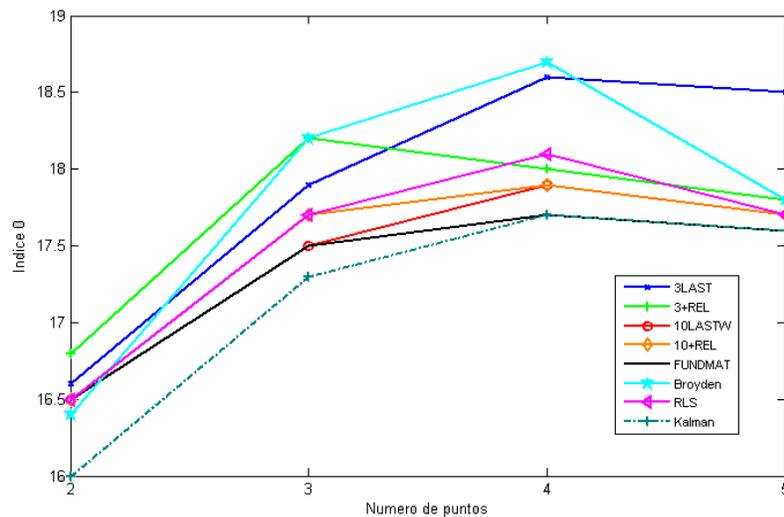


Figura 5.33.- Índice 0 sin ruido.

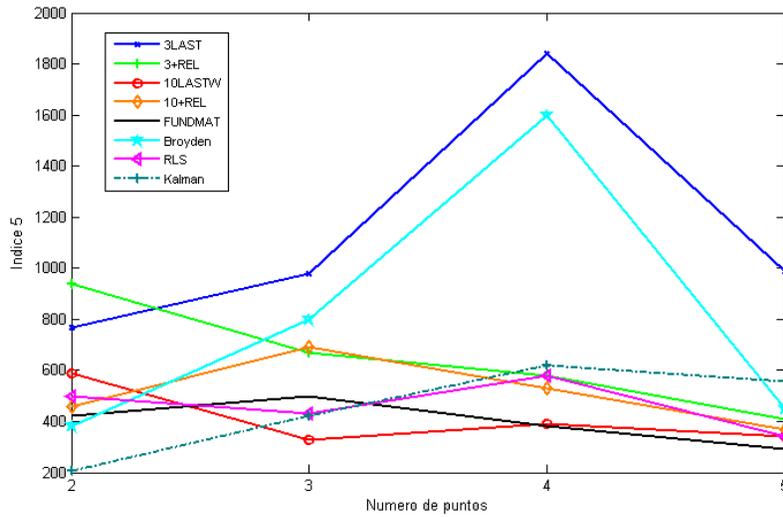


Figura 5.34.- Índice 5 sin ruido.

Para el índice 0 se observa un buen comportamiento para KALMAN y FUNDMAT, mientras que los métodos con peor comportamiento son BROYDEN, 3LAST, y 3+REL. Para el índice 5, 3LAST y BROYDEN son los de peor comportamiento, mientras que los demás algoritmos poseen un comportamiento medio aceptable, destacando 10LASTW y FUNDMAT.

A continuación se muestra la Tabla 5.5 con los resultados de las pruebas con ruido añadido:

Tabla 5.5.- Valores de los índices para los algoritmos considerados en pruebas con ruido añadido.

	ALGORITMO	VALORES CON RUIDO			
		2 PUNTOS	3 PUNTOS	4 PUNTOS	5 PUNTOS
ÍNDICE 0	3LAST	20.4	21.8	21.5	22.1
	3+REL	17.2	21.0	19.6	22.0
	10LASTW	18.4	17.8	20.7	19.9
	10+REL	18.5	20.9	19.4	21.4
	FUNDMAT	16.6	17.7	17.9	17.7
	BROYDEN	16.9	19.6	22.8	19.0
	RLS	16.7	18.8	18.4	18.4
	KALMAN	17.4	18.0	18.7	18.5
ÍNDICE 5*	3LAST	7.08	5.70	5.34	5.55
	3+REL	1.88	5.66	1.97	5.36
	10LASTW	4.11	0.78	4.99	3.65
	10+REL	4.14	6.01	2.97	5.14
	FUNDMAT	0.42	0.50	0.38	0.29
	BROYDEN	0.38	0.80	1.60	0.45
	RLS	0.50	0.43	0.58	0.34
	KALMAN	0.21	0.42	0.62	0.56

\* dividido por 1000

Las correspondientes gráficas generadas a partir de esta tabla se muestran a continuación:

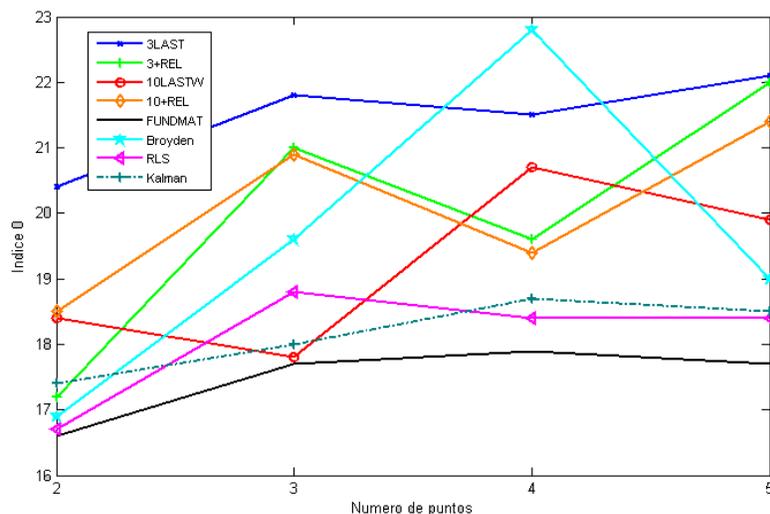


Figura 5.35.- índice 0 con ruido

A partir de esta gráfica se observa que los algoritmos que mantienen su comportamiento como el caso sin ruido son FUNDMAT, RLS, y KALMAN, estos dos últimos en menor escala. Los demás algoritmos se han degradado en diferentes proporciones. 3LAST sigue entre los de peor comportamiento.

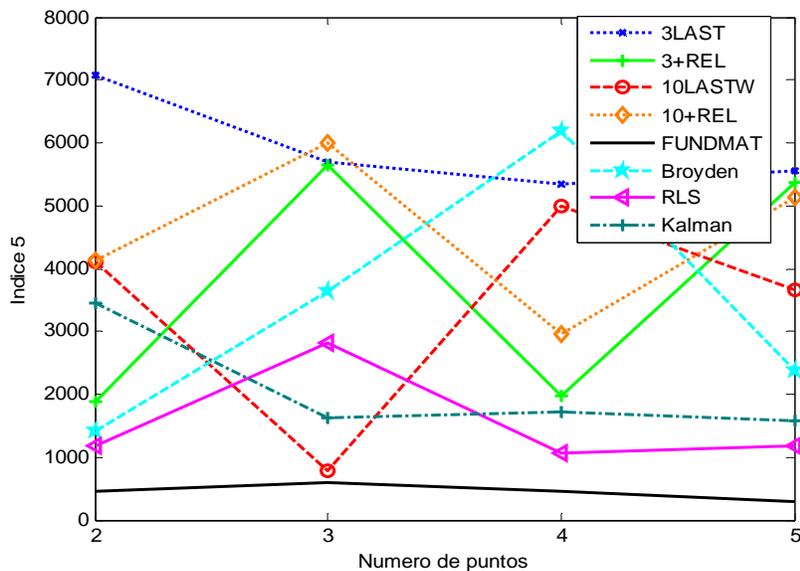
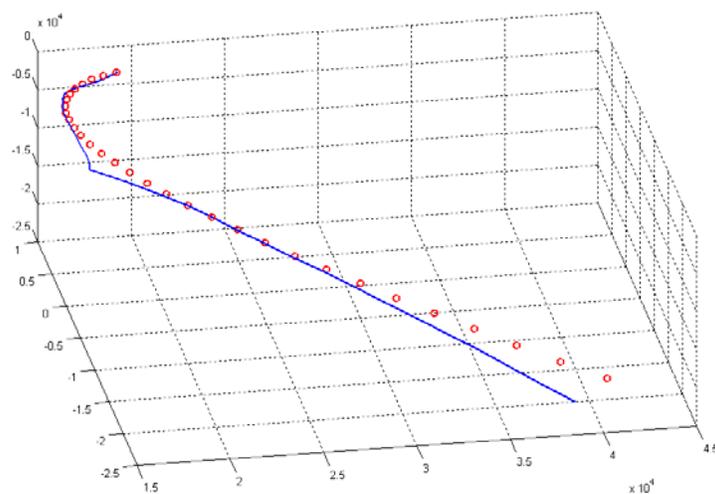


Figura 5.36.- Índice 5 con ruido

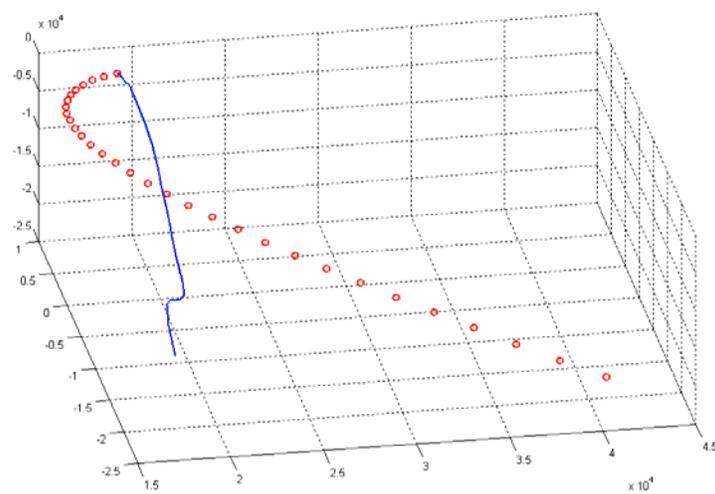
Capítulo 5.

En esta gráfica se observa que FUNDMAT posee definitivamente el mejor comportamiento que los demás algoritmos, de los cuales destacan RLS y KALMAN. 3LAST es de peor comportamiento.

Se muestra a continuación la evolución (evolucion en azul, puntos de referencia en rojo) en el espacio articular para todos los algoritmos, considerando el control con cinco puntos del patrón, sin ruido y con ruido gaussiano añadido:

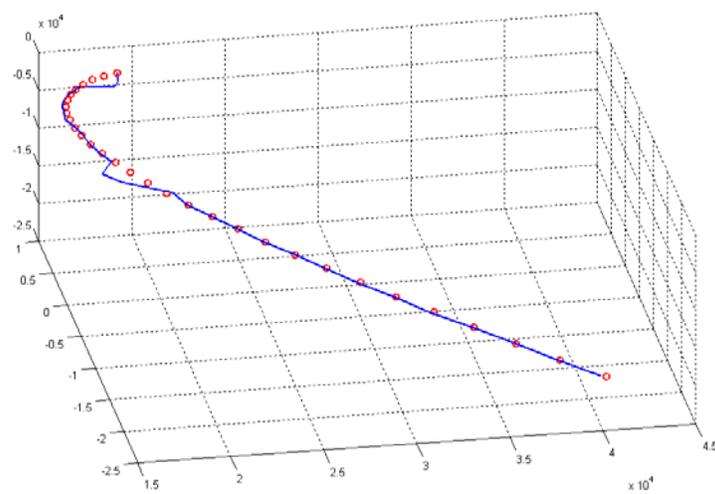


a) sin ruido

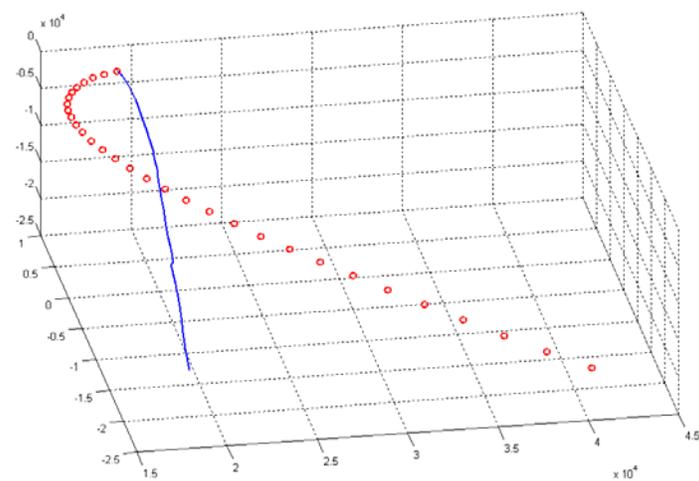


b) con ruido

Figura 5.37.- Evolución articular para el algoritmo 3LAST

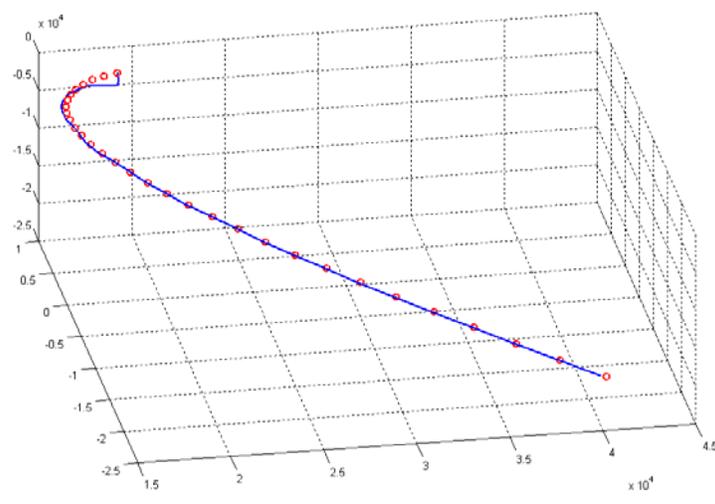


a) sin ruido

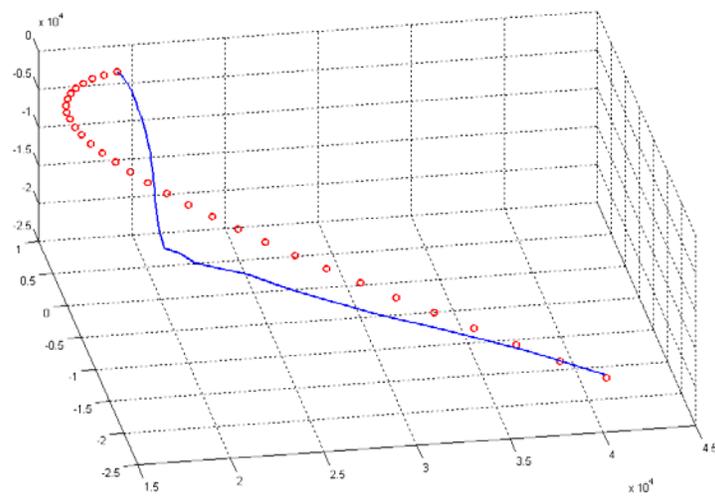


b) con ruido

Figura 5.38.- Evolución articular para el algoritmo 3+REL

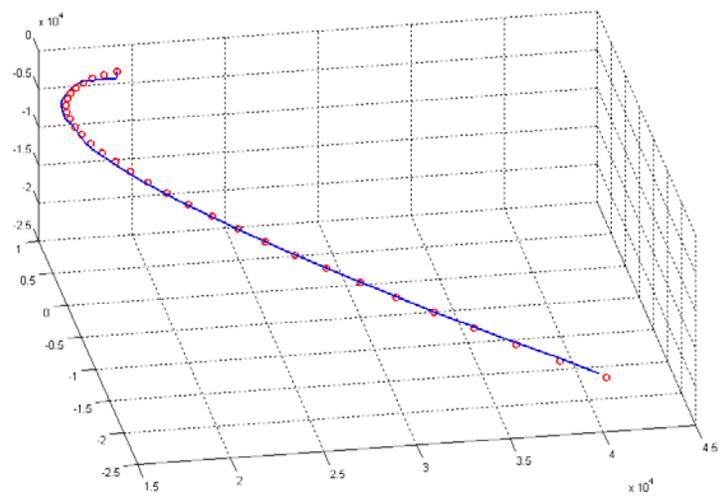


a) sin ruido

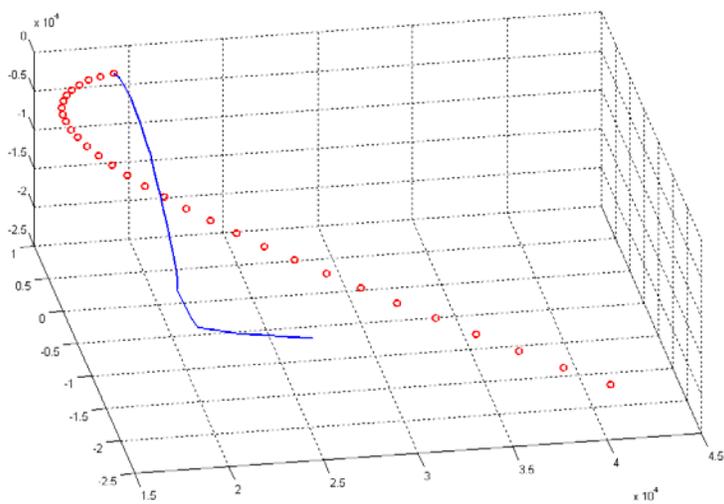


b) con ruido

Figura 5.39.- Evolución articular para el algoritmo 10LASTW

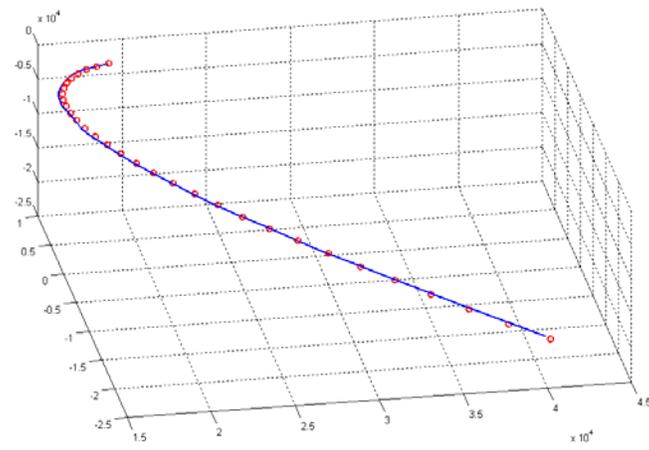


a) sin ruido

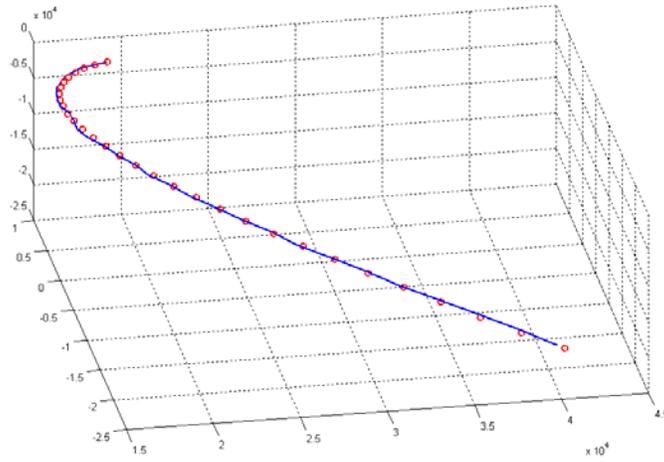


b) con ruido

Figura 5.40.- Evolución articular para el algoritmo 10+REL

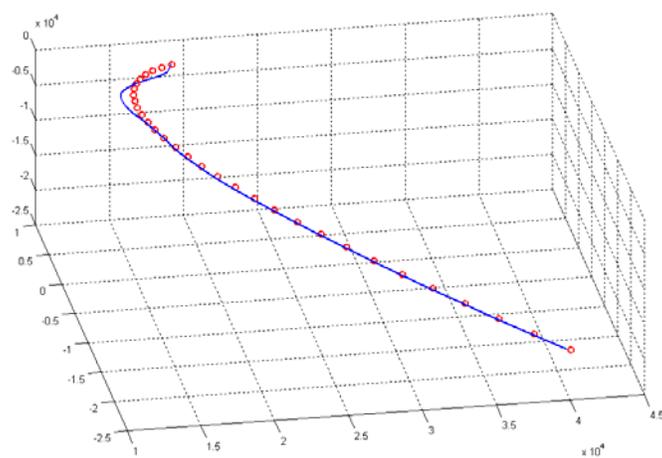


a) sin ruido

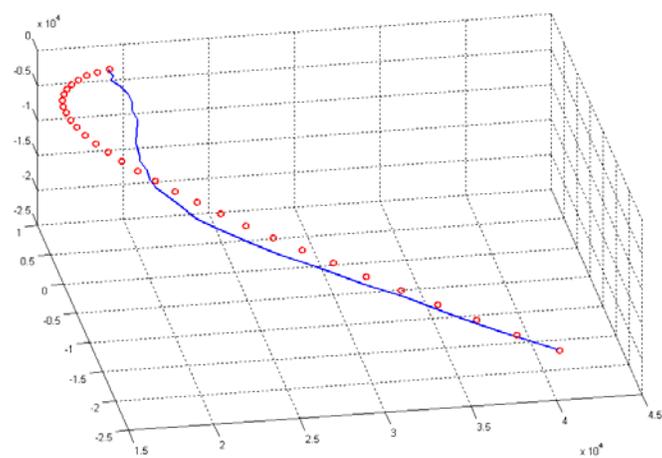


b) con ruido

Figura 5.41.- Evolución articular para el algoritmo FUNDMAT

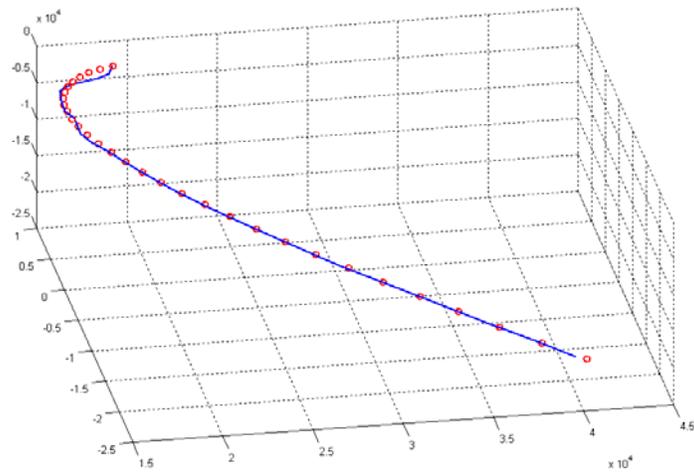


a) sin ruido

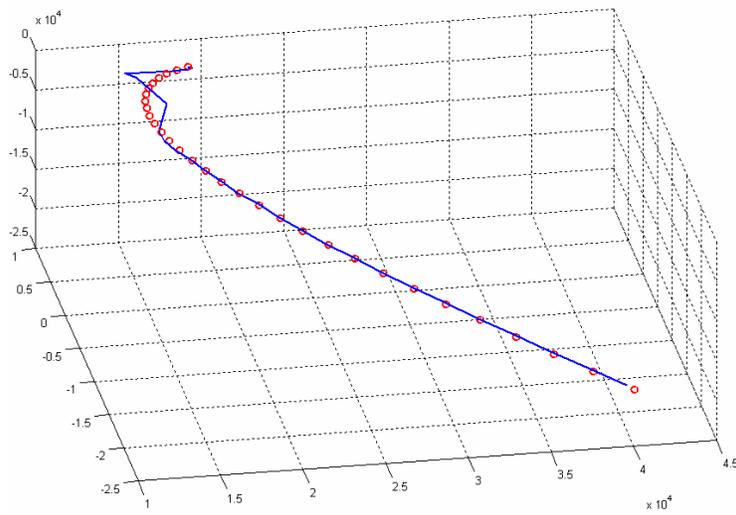


b) con ruido

Figura 5.42.- Evolución articular para el algoritmo BROYDEN

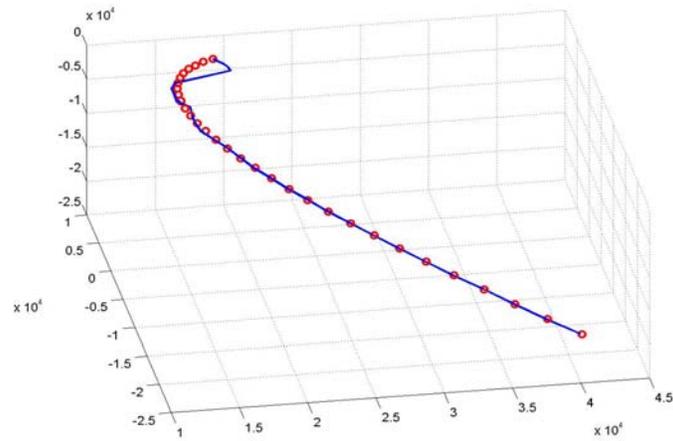


a) sin ruido

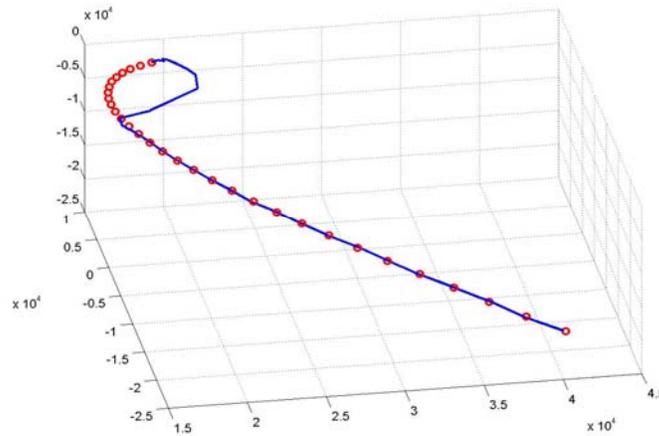


b) con ruido

Figura 5.43.- Evolución articular para el algoritmo RLS



a) sin ruido



b) con ruido

Figura 5.44.- Evolución articular para el algoritmo KALMAN.

Se observa para el caso sin ruido todos los algoritmos presentan un comportamiento aceptable, diferenciándose solamente en el inicio de la evolución, pues cada uno invierte menos o más movimientos en alcanzar la evolución correcta, dstando como los de mejor comportamiento FUNDMAT, RLS, y 10+REL. Para el caso con ruido, los algoritmos que se degradan completamente, de tal manera que pierden la tarea de seguimiento son 3LAST, 3+REL, y 10+REL. Los algoritmos que se degradan pero que continúan con la tarea son 10LASTW y BROYDEN. Los algoritmos que su comportamiento es similar al presentado en el caso sin ruido son FUNDMAT, RLS y KALMAN, aunque estos dos últimos tardan un poco más al inicio de la evolución en corregir hacia la trayectoria correcta.

### 5.3.6 CONCLUSIONES.

A continuación se presentan las conclusiones para el caso estático y dinámico por separado, finalmente unas conclusiones generales.

#### 5.3.6.1 CASO ESTÁTICO.

Para el caso sin ruido, las gráficas muestran que el algoritmo que presenta un mejor comportamiento en todos los índices es BROYDEN, teniendo también un buen comportamiento RLS, FUNDMAT KALMAN y 10+REL: estos algoritmos presentan menores errores en características y en articulaciones, menor tiempo de establecimiento y menor sobreoscilación. Como era de esperarse, el tiempo medio de cálculo del jacobiano se incrementa con el número de puntos, el tiempo más alto lo presenta 10LASTW seguido de FUNDMAT. En general, los errores articulares, el tiempo de establecimiento y la sobreoscilación disminuyen al aumentar el número de puntos considerados, el sistema tiene un mejor comportamiento al disponer de más información para efectuar el control.

Para las pruebas realizadas con ruido añadido, se observa que los algoritmos que realizan un proceso de filtrado son muy robustos como RLS y KALMAN, mientras que de los algoritmos iterativos, BROYDEN el más sensible al ruido. En general, se destacan como los algoritmos de mejor comportamiento FUNDMAT y RLS. Se puede considerar que 10+REL también presenta un buen comportamiento. Considerando las gráficas para los índices y las de evolución articular, BROYDEN es muy sensible al ruido, y junto con 3LAST y 3+REL son los algoritmos que presentan un mal comportamiento frente al ruido.

En los resultados de las pruebas adicionales realizadas con un nivel de ruido mayor ( $\sigma = 1$ ) para FUNDMAT y RLS, se observa que FUNDMAT es el más robusto frente al ruido, presentando un muy buen comportamiento incluso en presencia de niveles de ruido muy altos. En el respectivo gráfico de evolución articular (Figura 5.31) puede observarse que con FUNDMAT el sistema alcanza las posiciones de referencia siguiendo trayectorias muy cercanas a las rectilíneas, mejor que las trayectorias generadas con RLS.

Como puede verse en el gráfico de la (Figura 5.9), el tiempo medio de estimación del jacobiano usando FUNDMAT es hasta cuatro veces mayor que usando RLS, llegando a tardar hasta 5,7 milisegundos. Este tiempo de cálculo tan alto podría representar un problema en la implementación de una aplicación con sistema abierto. Este algoritmo debe optimizarse para obtener menores tiempos de estimación.

#### 5.3.6.2 CASO DINÁMICO.

Los algoritmos que presentan un mejor comportamiento son FUNDMAT, KALMAN, 10+REL, RLS, y 10LASTW. En general, para estos métodos, el error en articulaciones (índice 5) es relativamente independiente del número de puntos empleado, mientras que el error en características aumenta con el número de puntos considerados, esto se

explica porque los errores en características se acumulan al haber un mayor número de características a cumplir, el comportamiento del algoritmo no varía significativamente en la práctica, como indican los índices de errores articulares.

Con ruido añadido se observa una degradación del comportamiento de la mayoría de los algoritmos, en las gráficas de los índices y las de evolución articular puede verse que el algoritmo que presenta el mejor comportamiento es FUNDMAT, vuelve a comprobarse así la robustez de este algoritmo ante el ruido. RLS también presenta un comportamiento muy bueno. El comportamiento del resto de los algoritmos, es inestable al número de puntos considerados.

Se observa que en las pruebas realizadas en ausencia de ruido, todos los algoritmos siguen la trayectoria dinámica con mayor o menor fidelidad, se concluye por lo tanto que la ley de control predictiva utilizada es válida.

### **5.3.6.3 CONCLUSIONES GENERALES.**

Al realizarse el cálculo del jacobiano en forma numérica, no se ha comprobado experimentalmente ninguna inestabilidad en ausencia de ruido añadido dentro del espacio de trabajo del robot.

Tanto en el caso estático como en el caso dinámico, RLS ha mostrado buenos resultados. Hay que destacar que el comportamiento de este algoritmo es dependiente un valor  $\lambda$  (4.36) y (4.37) el cual debe sintonizarse. El comportamiento de RLS sin ruido añadido, varía mucho según el índice y el valor de  $\lambda$ , mientras que en presencia de ruido se observa que el algoritmo se comporta mejor cuanto mayor es  $\lambda$  (hasta llegar a  $\lambda = 0.9$ ). Esta dependencia haría de este algoritmo poco práctico su utilización en entornos ruidosos desconocidos, ya que se necesitaría realizar una tarea previa de sintonización de  $\lambda$  antes de proceder con el control.

En general se ha comprobado que la calidad del control depende del método de estimación del jacobiano.

Hay que destacar la evolución en el espacio de articulaciones generada por FUNDMAT tanto en el caso estático (Figura 5.22) como en el caso dinámico (Figura 5.41). En el caso estático se alcanza las referencias con una trayectoria suave, la cual con ruido añadido no se distorsiona. El mismo caso se presenta en el caso dinámico, donde la evolución de su trayectoria sigue desde el inicio a las referencias, y esta evolución no se degrada con el ruido añadido.



# CAPITULO 6

## 6 JACOBIANO ANALÍTICO DE LA IMAGEN.

En capítulos anteriores, se ha considerado solamente la estimación del jacobiano de la imagen. En este capítulo se analiza el jacobiano de la imagen desde el punto de vista de las relaciones matemáticas a partir de las cuales éste se deriva.

### 6.1 EXPRESIÓN DEL JACOBIANO ANALÍTICO DE LA IMAGEN.

En el cálculo del jacobiano analítico de la imagen, interviene la matriz de interacción, el jacobiano del robot, y la transformación cámara-robot. Según la configuración (cámara en mano o cámara fija) que se esté usando, hay algunas consideraciones en las relaciones anteriores. Se describirá en adelante el jacobiano de la imagen para una configuración cámara fija, (Figura 6.1) utilizada en la presente tesis.

La matriz de interacción (4.7) depende de las características normalizadas de la imagen y de la coordenada  $Z$  (con respecto al sistema de coordenadas de la cámara) a la que se encuentra la característica detectada. Si se conoce los parámetros intrínsecos de la cámara se puede hallar las características normalizadas de la imagen (3.7). Si se cuenta con una segunda cámara y se conoce la transformación entre ambas cámaras, se puede realizar una reconstrucción tridimensional para determinar la coordenada de profundidad  $Z$  aplicando cualquiera de los métodos de triangulación conocidos [68]. Tanto los parámetros intrínsecos y la relación entre cámaras, son relaciones fijas, por lo que se calculan en un proceso de calibración previo fuera de línea.

El jacobiano del robot es una matriz que debe calcularse en cada ciclo de control, éste depende de la cinemática directa y de la cinemática diferencial del robot con respecto al punto de referencia del robot previamente elegido.

La matriz de transformación entre el sistema de coordenadas del robot y de la cámara depende de la rotación y traslación entre ambos sistemas. Al ser esta relación constante, también se la determina en un proceso de calibración previo.

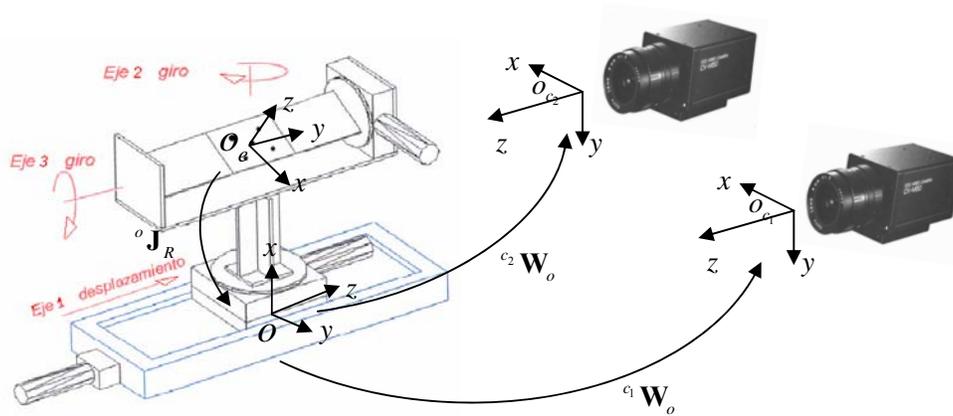


Figura 6.1.- Configuración cámara fija con las diferentes transformaciones.

Se sabe que la relación entre la variación de las características de la imagen  $\mathbf{s}$  y la variación de un punto  $\mathbf{r}_c$  en el espacio de trabajo del robot (con referencia a la cámara), está dada por la matriz de interacción  $\mathbf{J}_v(u, v, Z)$ :

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_v(u, v, Z) \dot{\mathbf{r}}_c \quad (6.1)$$

Si las características de la imagen son el centro de gravedad  $(u, v)$  en coordenadas normalizadas de puntos en la imagen, la matriz de interacción está dada por:

$$\mathbf{J}_v(u, v, Z) = \begin{bmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{Z} & 0 & \frac{u}{Z} & uv & -(1+u^2) & v \\ 0 & -\frac{1}{Z} & \frac{v}{Z} & (1+v^2) & uv & -u \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

donde  $f_x$  y  $f_y$  son parámetros intrínsecos (3.4) de la cámara.

La relación entre la variación de puntos pertenecientes a dos sistemas de coordenadas diferentes (en este caso del robot y de la cámara, al igual que (4.8)), está dada por una matriz de transformación  $\mathbf{W}_{co}$ :

$$\dot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{W}_{co} \dot{\mathbf{r}}_o \quad (6.3)$$

donde  $\dot{\mathbf{r}}_o$  está referido a la base del robot y  $\mathbf{W}_{co}$  está dada por (ver anexo A):

$$\mathbf{W}_{co} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{co} & [\mathbf{t}_{co}]_x \mathbf{R}_{co} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{R}_{co} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

*Jacobiano Analítico de la Imagen.*

matriz 6x6 que depende de la rotación  $\mathbf{R}_{co}$  y la matriz skew symmetric de la traslación  $\mathbf{t}_{co}$  entre la base del robot y el sistema de la cámara.

La variación de un punto del espacio de trabajo con referencia a la base del robot está relacionada con la variación de las articulaciones por el jacobiano del robot  $\mathbf{J}_R$ :

$$\dot{\mathbf{r}}_o = \mathbf{J}_R \dot{\mathbf{q}} \quad (6.5)$$

La relación general entre variaciones de características en la imagen con variaciones en las articulaciones del robot es [26] [70]:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_v(u, v, Z) \mathbf{W}_{co} \mathbf{N} \mathbf{J}_R \dot{\mathbf{q}} \quad (6.6)$$

Donde  $\mathbf{N}$  es una matriz 6x6 de transformación auxiliar que referencia el jacobiano del robot a su base, y está dada por:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & [\mathbf{t}_{03}]_x \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

donde  $[\mathbf{t}_{03}]_x$  es la matriz skew symmetric de la posición del sistema del último eslabón (eslabón número tres) con respecto a la base del robot,  $\mathbf{I}_3$  es la matriz identidad de orden 3.

Comparando (6.6) y la definición del jacobiano visual-motor (4.13), el jacobiano analítico  $\mathbf{J}$  buscado toma la expresión:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_v(u, v, Z) \mathbf{W}_{co} \mathbf{N} \mathbf{J}_R \quad (6.8)$$

La dimensión del jacobiano analítico para un solo punto en la imagen es de dimensión  $2 \times n$ , donde  $n$  es el número de grados de libertad del robot. Para el caso de mayor número de puntos en la imagen, su dimensión es de  $2m \times n$ , donde  $m$  es el número de puntos en la imagen, mientras que la dimensión de la matriz de interacción es  $2m \times 6$ .

Para cada imagen se calcula un jacobiano diferente bajo la misma expresión. La matriz de interacción  $\mathbf{J}_v(u, v, Z)$ , la matriz  $\mathbf{N}$  y el jacobiano del robot  $\mathbf{J}_R$  se calculan en cada ciclo de control., donde  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{J}_R$  son comunes para el jacobiano analítico de cada cámara.

Hay que hacer notar que en esta configuración cámara fija con dos cámaras (Figura 6.1), existe una transformación  $\mathbf{W}_{co}$  diferente para cada cámara, las cuales son matrices constantes.

## 6.2 CALIBRACIÓN CÁMARA-ROBOT.

Se trata de encontrar la relación constante (posición y orientación) entre el sistema de coordenadas de la cámara y el sistema de coordenadas de efector final (Figura 6.2) (configuración cámara en mano) o entre el sistema de coordenadas de la cámara y el sistema de la base del robot (configuración cámara fija) (Figura 6.1). Hay dos estrategias para encontrar esta transformación:

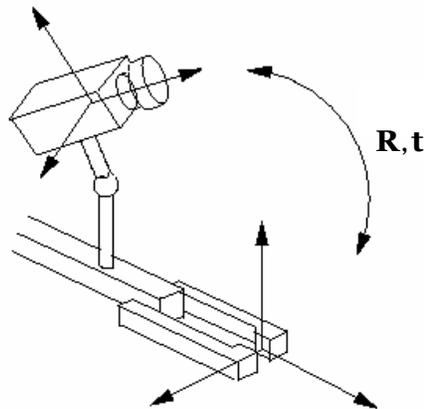


Figura 6.2.- Relación entre las coordenadas del robot y las de la cámara.

- Encontrar una transformación 3D rígida entre el sistema de coordenadas de la cámara y el sistema del robot, en base a puntos comunes medidos en ambos sistemas [45] (Figura 6.3), hay varios métodos que resuelven este problema como la descomposición SVD [181], usando matrices orthonormales [81], con cuaternios [80], ó cuaternios duales [184].

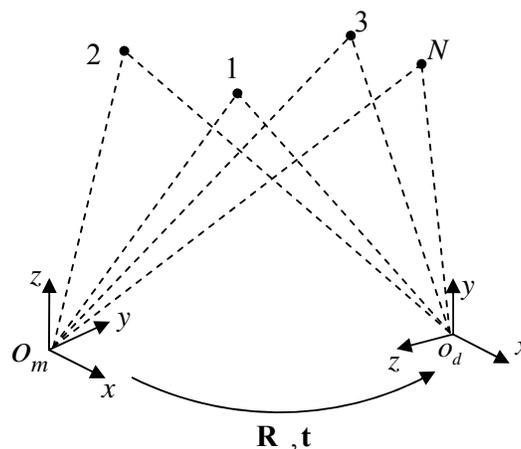


Figura 6.3.- N puntos medidos en dos sistemas de coordenadas diferentes.

- Resolver la ecuación matricial homogénea de la forma:  $\mathbf{AX} = \mathbf{XB}$  donde  $\mathbf{A}$  es la transformación entre dos posiciones adyacentes de la cámara, y  $\mathbf{B}$  es la transformación entre dos posiciones adyacentes del robot,  $\mathbf{X}$ : transformación robot-cámara buscada [169] (Figura 6.4). Existen varias propuestas para dar solución a esta ecuación como el método geométrico [105], método de Tsay [179], descomposición SVD [181], cuaternios [28], cuaternios duales [184], etc.

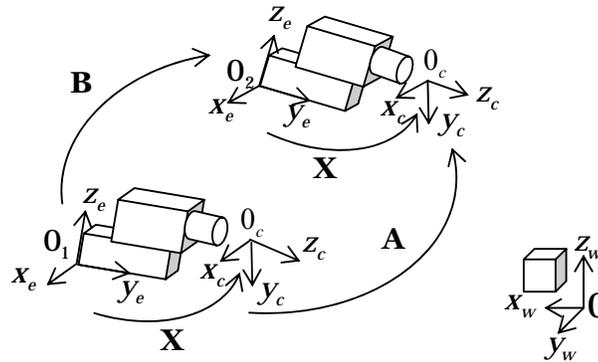


Figura 6.4.- Un movimiento con dos posiciones adyacentes del efector final unido a la cámara.

Para la configuración cámara fija utilizada (Figura 6.1), existe una transformación constante entre la base del robot y cada cámara, que puede ser obtenida por cualquiera de los métodos indicados, se ha utilizado el método de descomposición singular SVD de la transformación rígida entre el sistema del robot y el sistema de la cámara que a continuación se describe.

### 6.2.1 ESTRATEGIA DE ENCONTRAR TRANSFORMACIÓN 3D RÍGIDA ENTRE DOS SISTEMAS DE COORDENADAS POR EL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN SINGULAR SVD.

Se va a encontrar la transformación ( $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{t}$ ) del sistema uno al sistema dos. Si se tiene  $N$  puntos comunes a dos sistemas, se cuenta entonces con dos conjuntos de  $N$  puntos medidos en ambos sistemas  $\{\mathbf{m}_i\}$  (sistema uno) y  $\{\mathbf{d}_i\}$  (sistema dos), donde  $i = 1, \dots, N$ , se cumple que

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{R}\mathbf{m}_i + \mathbf{t} \quad (6.9)$$

donde  $\mathbf{R}$  es matriz  $3 \times 3$  de rotación, y  $\mathbf{t}$  vector  $3 \times 1$  de traslación del sistema uno al sistema dos.

La estrategia es minimizar la expresión:

$$\min \sum_{i=1}^N \left\| \mathbf{d}_i - \hat{\mathbf{R}} \mathbf{m}_i - \hat{\mathbf{t}} \right\|^2 \quad (6.10)$$

donde  $\hat{\mathbf{R}}$  y  $\hat{\mathbf{t}}$  son los parámetros a estimarse.

Como consecuencia de la minimización de (6.10) ambos conjuntos de puntos tendrían el mismo centroide, por lo que (6.10) se puede volver a escribir como:

$$\min \sum_{i=1}^N \left\| \mathbf{d}_{ci} - \hat{\mathbf{R}} \mathbf{m}_{ci} \right\|^2 \quad (6.11)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{ci} &= \mathbf{d}_i - \bar{\mathbf{d}} & \text{con} & & \bar{\mathbf{d}} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{d}_i \\ \mathbf{m}_{ci} &= \mathbf{m}_i - \bar{\mathbf{m}} & \text{con} & & \bar{\mathbf{m}} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i \end{aligned} \quad (6.12)$$

Desarrollando (6.11), se puede reescribir como:

$$\min \sum_{i=1}^N (\mathbf{d}_{ci}^T \mathbf{d}_{ci} + \mathbf{m}_{ci}^T \mathbf{m}_{ci} - 2 \mathbf{d}_{ci}^T \hat{\mathbf{R}} \mathbf{m}_{ci}) \quad (6.13)$$

esta expresión es minimizada cuando el último término es maximizado, lo cual es equivalente a maximizar la traza de  $\hat{\mathbf{R}} \mathbf{Z}$ , donde  $\mathbf{Z}$  es una matriz de correlación definida por:

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_{ci} \mathbf{d}_{ci}^T \quad (6.14)$$

Si la descomposición singular de  $\mathbf{Z}$  está dado por  $\mathbf{Z} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$ , entonces la rotación  $\hat{\mathbf{R}}$  que maximiza dicha traza es

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{V} \mathbf{U}^T \quad (6.15)$$

A partir de (6.9), la traslación  $\hat{\mathbf{t}}$  buscada es la traslación que alinea el centroide del conjunto  $\{\mathbf{d}_i\}$  con el centroide rotado de  $\{\mathbf{m}_i\}$ :

$$\hat{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{d}} - \hat{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{m}} \quad (6.16)$$

### 6.3 EXPERIMENTOS REALIZADOS.

A fin de comparar los resultados obtenidos en tareas de control basadas en el jacobiano analítico con las tareas basadas en los algoritmos de estimación del jacobiano realizadas en el capítulo 5, se utiliza el mismo patrón del cinco puntos sobre un plano blanco descrito en el capítulo 3 (Figura 3.20) y (Figura 3.21), donde los centros de gravedad de cada uno de ellos corresponderán a las características visuales a detectar.

Antes de realizar experimentos con el jacobiano analítico, se debe determinar la posición de cada uno de los cinco puntos del patrón en el sistema de coordenadas del tercer eslabón, para ello recurriremos a técnicas de reconstrucción tridimensional haciendo uso del sistema de visión.

#### 6.3.1 DETERMINACIÓN DE LA POSICIÓN DE LOS CINCO PUNTOS DEL PATRÓN EN EL SISTEMA DEL TERCER ESLABÓN.

El sistema articular está modelado por los sistemas de coordenadas indicados en la Figura 3.14 (ver apartado 3.3), y se sabe que el patrón de puntos descansa en una plataforma paralela al eje  $Y_3$  del tercer eslabón a una distancia  $\delta$  (Figura 6.5), consecuentemente, el plano de la plataforma es perpendicular al eje  $Z_3$ .

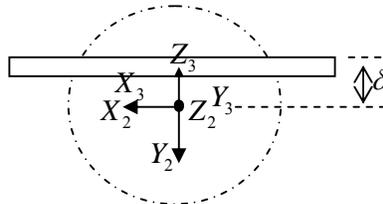


Figura 6.5.- Posición de la plataforma en el sistema del tercer eslabón donde se indica la distancia  $\delta$  del plano de la plataforma al eje  $Y_3$  del sistema del tercer eslabón.

##### 6.3.1.1 DETERMINACIÓN DE LA DISTANCIA $\delta$ .

Esta distancia  $\delta$  es obtenida geoméricamente como la distancia de una recta (eje  $Y_3$ ) a un plano (plataforma). El eje  $Y_3$  perteneciente al tercer eslabón se considera que es la recta que representa a los ejes de rotación de los arcos descritos por cada uno de los puntos del patrón (Figura 3.37) al girar el tercer eslabón cuando el segundo y primer eslabón están en la posición de reposo (valores de sus ejes:  $d_1 = 0$  y  $\theta_2 = 0$ ), una vista de canto del eje  $Y_3$  se muestra en la Figura 6.6 donde cada punto del patrón está representado por un color diferente según la Tabla 3.4. La distancia  $\delta$  hallada corresponde al obtenido en la coordenada  $Z_3$  del sistema del tercer eslabón (Tabla 6.2).

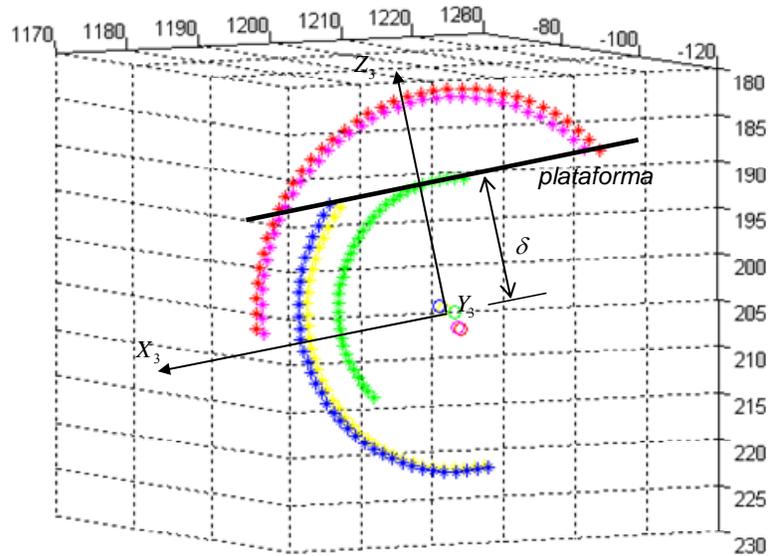


Figura 6.6.-Vista de canto del eje  $Y_3$  del sistema del tercer eslabón con los arcos descritos por cada uno de los cinco puntos del patrón en la posición ( $d_1 = 0, \theta_2 = 0$ ). Se muestra la posición de la plataforma que contiene el patrón de cinco puntos.

### 6.3.1.2 DETERMINACIÓN DE LOS PUNTOS DEL PATRÓN EN EL SISTEMA DE COORDENADAS DEL TERCER ESLABÓN.

En la posición de reposo del tercer eslabón (posición horizontal de la plataforma, valor de su eje  $\theta_3 = 0$ ), se determina (mediante reconstrucción tridimensional) la posición de cada uno de los cinco puntos del patrón con referencia al sistema de la primera cámara, cuyos valores se recogen en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1.- Coordenadas de cada uno de los cinco puntos del patrón en el sistema de coordenadas de la primera cámara.

PUNTOS DEL PATRÓN	COORDENADAS*		
	$X_c$	$Y_c$	$Z_c$
uno	-316.468	4.042	1290.250
dos	-294.204	9.639	1289.306
tres	-272.533	14.834	1288.244
cuatro	-290.337	3.437	1309.465
cinco	-297.966	15.698	1268.829

\* en mm.

En esta posición, giramos el segundo eslabón, los centros de los arcos descritos coincidirán en un mismo punto (experimentalmente estos centros de giro no coinciden ligeramente, se toma el centroide de todos ellos), el cual es la intersección del eje  $Z_3$  con el plano del patrón (Figura 6.7). Conociendo este punto de intersección, el vector dirección del eje  $Y_3$  (que se determinó en el apartado 3.4.5), y la posición de cada uno de los 5 puntos del patrón (Tabla 6.1), se determina la posición de cada uno de estos puntos en el plano del patrón con referencia al punto de intersección. Estas posiciones en el plano del patrón corresponden a las posiciones  $X_3, Y_3$  del sistema de coordenadas del tercer eslabón, las cuales se recogen en la Tabla 6.2.

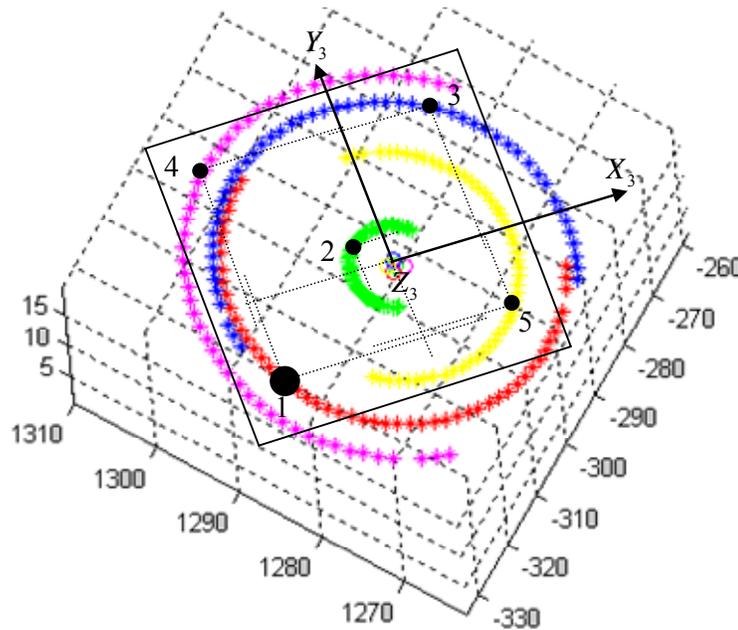


Figura 6.7.-Ubicación de cada uno de los cinco puntos del patrón en el plano de la plataforma, en relación al sistema de coordenadas de la cámara 1.

Tabla 6.2.- Coordenadas de cada uno de los cinco puntos del patrón en el sistema de coordenadas del tercer eslabón.

PUNTOS DEL PATRÓN	COORDENADAS*		
	$X_3$	$Y_3$	$Z_3$
Uno	-18.314	-13.129	13.47
Dos	-3.625	4.538	13.47
Tres	10.687	21.653	13.47
Cuatro	-19.175	19.30	13.47
Cinco	12.169	-10.32	13.47

\* en mm.

### 6.3.2 RESULTADOS DE COMPARAR EL JACOBIANO ANALÍTICO DE LA IMAGEN Y EL JACOBIANO ESTIMADO.

Se han realizado tareas de control basados en el jacobiano analítico tanto de posicionamiento como de seguimiento, utilizando como objeto de control el patrón de cinco puntos descrito anteriormente, cada una de estas pruebas se han llevado a cabo sin ruido añadido o con ruido añadido de tipo gaussiano de  $\sigma = 0.5$ . A fin de realizar una comparación, se han realizado las mismas tareas de control realizadas en el capítulo 5 basadas en los algoritmos de estimación del jacobiano de la imagen presentados en el capítulo 4 (Tabla 4.1). Se utilizan los mismos índices de evaluación definidos previamente (ver apartado 5.3.2).

#### 6.3.2.1 CASO ESTÁTICO.

A partir de una posición de inicio se alcanzan posiciones previamente establecidas dentro del espacio de trabajo del sistema articular (Figura 5.4). Las pruebas se han realizado utilizando dos, tres, cuatro y cinco puntos del patrón para el cálculo del jacobiano. Los resultados se presentan en Tabla 6.3.

Tabla 6.3.- Valores para los 5 índices para el jacobiano analítico, caso estático, sin ruido y con ruido añadido de  $\sigma = 0.5$ .

CASO ESTÁTICO					
	ÍNDICES	2 PUNTOS	3 PUNTOS	4 PUNTOS	5 PUNTOS
SIN RUIDO	Indice 0	159.153	160.628	160.194	163.744
	Indice 1*	31.40	31626.0	31569.2	31498.2
	Indice 2	7.090	7.454	7.454	7.636
	Indice 3	0.089	0.114	0.102	0.134
	Indice 4#	4.218	5.198	4.671	4.140
CON RUIDO $\sigma = 0.5$	Indice 0	165.796	167.939	167.783	168.733
	Indice 1*	33.03	33464.0	34017.5	33466.8
	Indice 2	8.727	11.636	13.272	15.909
	Indice 3	0.417	0.853	1.280	1.409
	Indice 4#	3.236	3.267	3.936	4.307

\* dividido por 1000 # en milisegundos

Las gráficas del comportamiento del jacobiano analítico sin ruido añadido para cada uno de los índices se presentan entre la Figura 6.8 y la Figura 6.11, y a fin de tener gráficas más claras, se presentan no todos algoritmos estudiados en el capítulo 5, sino solamente los más representativos.

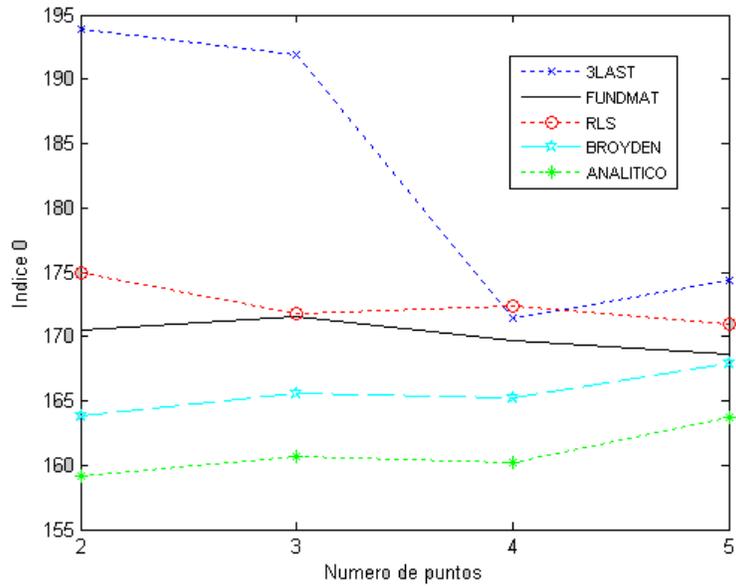


Figura 6.8.- Indice 0 sin ruido

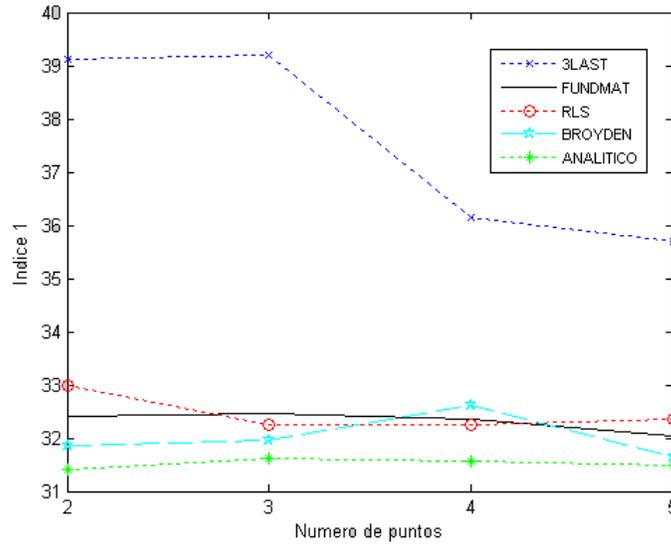


Figura 6.9.- Indice 1 sin ruido.

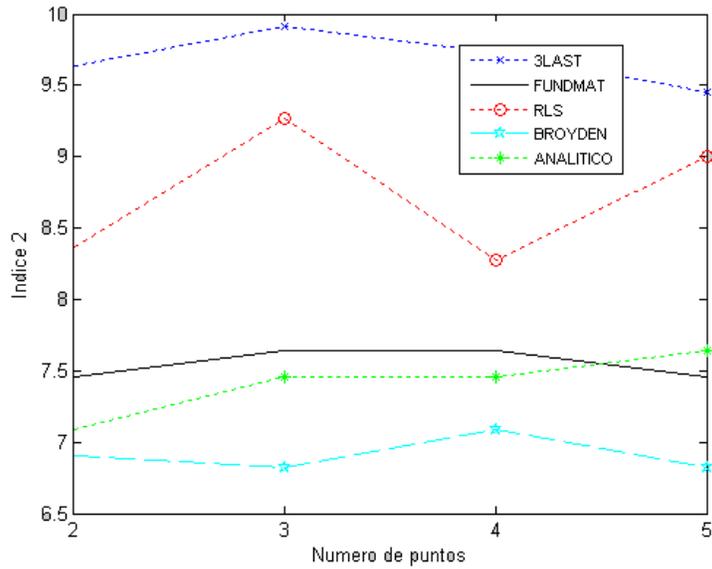


Figura 6.10.- Indice 2 sin ruido.

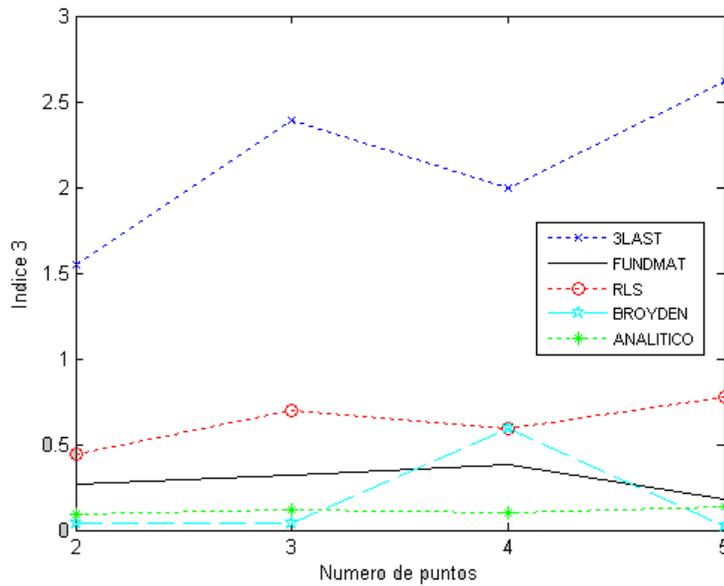


Figura 6.11.- Indice 3 sin ruido.

Se observa que el comportamiento de los algoritmos de estimación del jacobiano es similar a los presentados en las gráficas del capítulo 5, se puede observar un buen comportamiento del jacobiano analítico y del método de BROYDEN, que inclusive para algunos índices se observa mejores resultados que el método FUNDMAT, el método 3LAST para todos los índices es el que se comporta peor. El método RLS tiene un comportamiento medio. La siguiente gráfica que corresponde al índice 4, muestra el tiempo de procesamiento de cada uno de los algoritmos presentados en milisegundos:

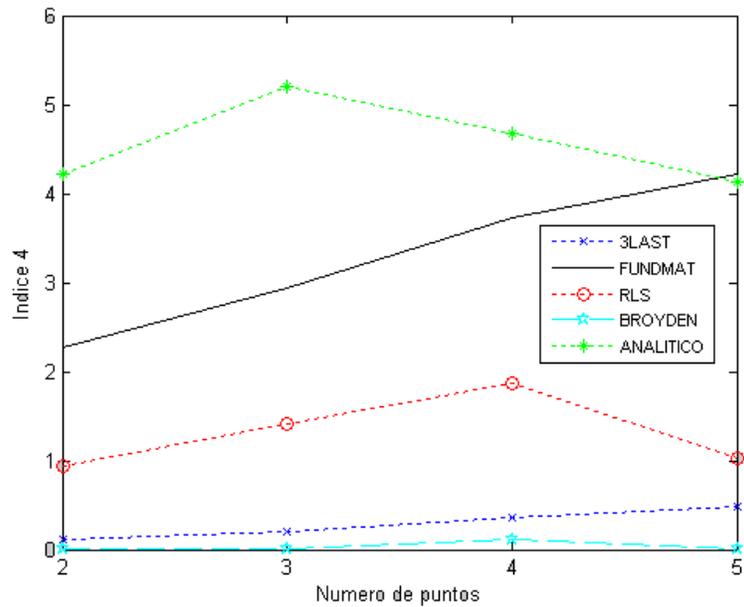


Figura 6.12.- Índice 4: tiempo promedio de estimación del jacobiano de la imagen en ms.

Se observa que los dos algoritmos que ocupan mayor tiempo de procesamiento son FUNDMAT y ANALÍTICO, pero el método ANALÍTICO toma mucho mayor tiempo de procesamiento (con dos o tres puntos casi el doble), a diferencia de FUNDMAT que su tiempo de procesamiento se incrementa con el número de puntos considerados. A partir de la gráfica se observa que el método de BROYDEN y 3LAST poseen el menor tiempo de procesamiento.

Se han realizado pruebas del comportamiento de estos algoritmos en condiciones de ruido gaussiano añadido con  $\sigma = 0.5$  en la detección de las características. Los resultados para las pruebas con ruido añadido se presentan a continuación (Figura 6.13 a Figura 6.17):

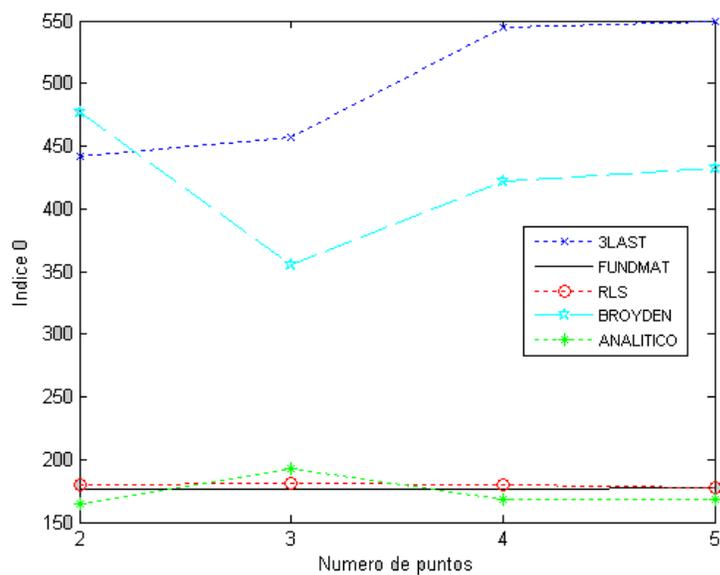


Figura 6.13.- Indice 0 con ruido.

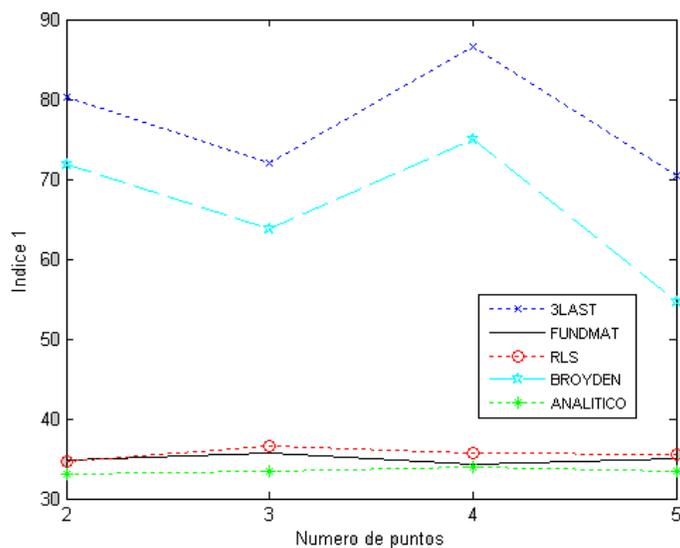


Figura 6.14.- Indice 1 con ruido.

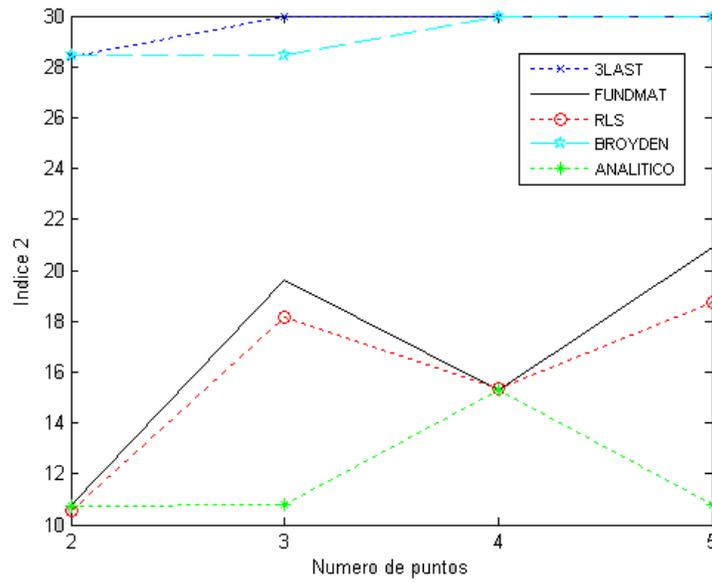


Figura 6.15.- Indice 2 con ruido.

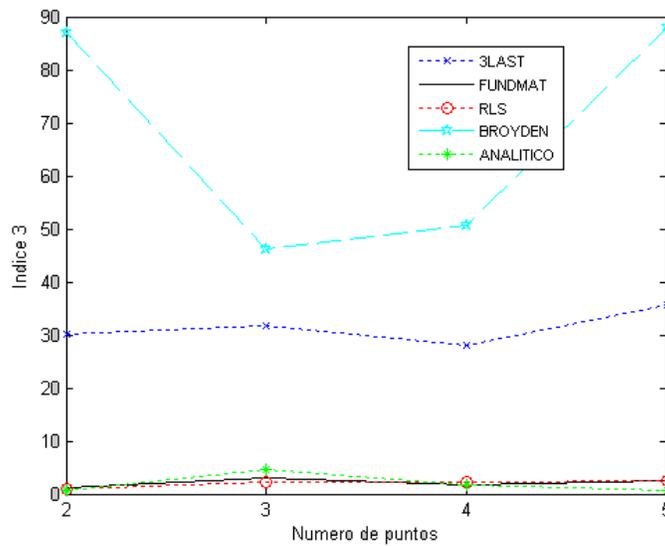


Figura 6.16.- Indice 3 con ruido.

A partir de las gráficas anteriores se observa que hay tres métodos que básicamente responden de igual manera para todos los índices: FUNDMAT, RLS y ANALÍTICO, mientras que 3LAST y BROYDEN son los de más bajo comportamiento, pero siendo 3LAST el peor. A continuación se presenta la gráfica para el índice 4 en milisegundos:

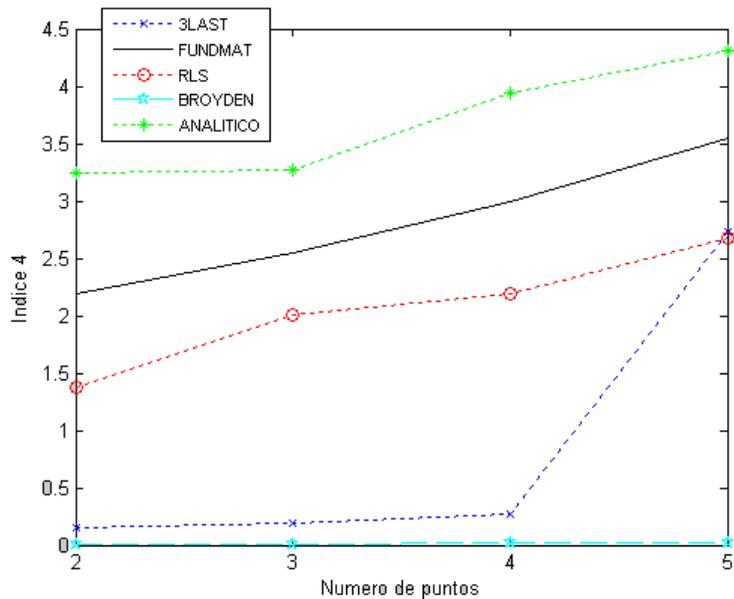
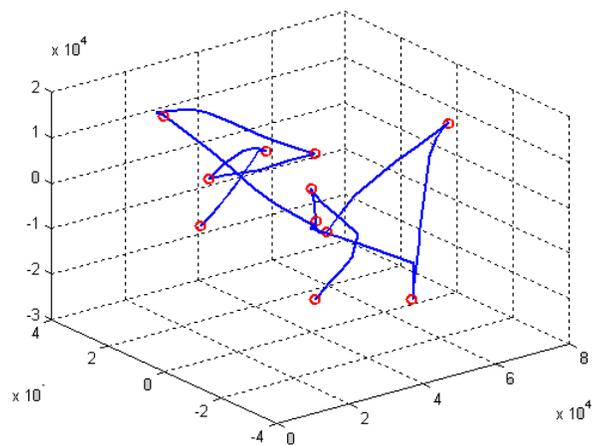


Figura 6.17.- Indice 4 con ruido.

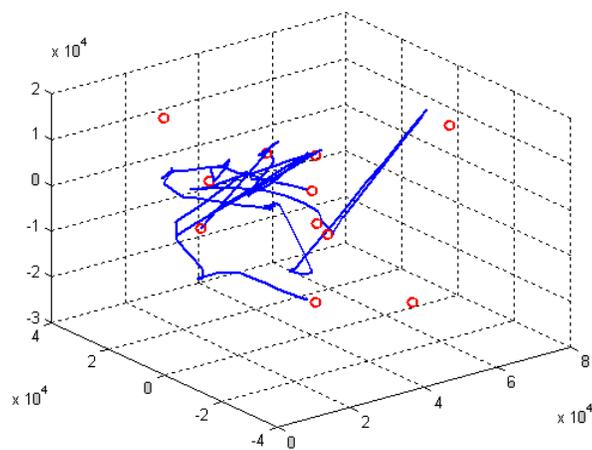
Se observa que con ruido añadido, se conserva el comportamiento general para el caso sin ruido (

Figura 6.12), RLS ha aumentado su tiempo de procesamiento, y 3LAST sólo para el caso de cinco puntos considerados, BROYDEN mantiene el menor tiempo de procesamiento.

Las siguientes gráficas muestran el comportamiento para los algoritmos evaluados en el espacio de articulaciones considerando cinco puntos del patrón, casos sin ruido con ruido añadido (Figura 6.18 a Figura 6.22):

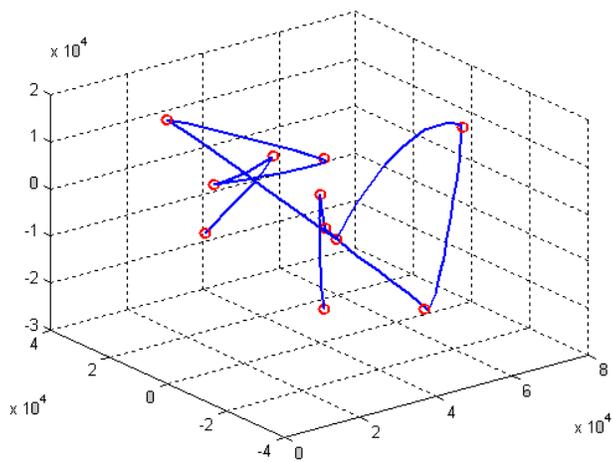


a) sin ruido

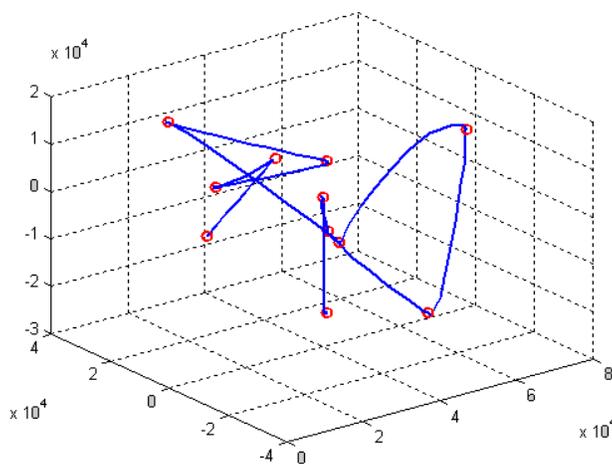


b) con ruido

Figura 6.18.- Evolución articular para 3LAST.

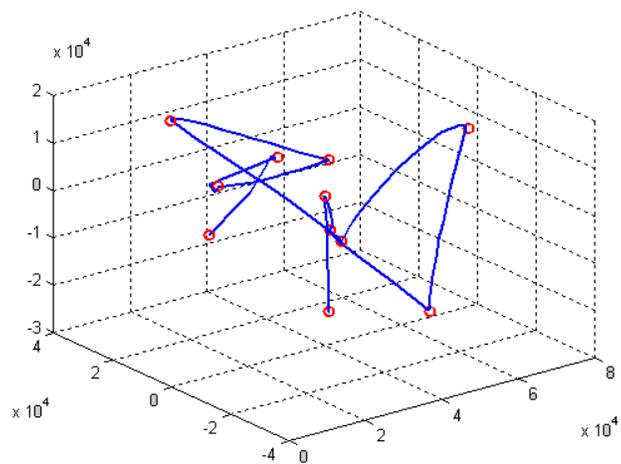


a) sin ruido

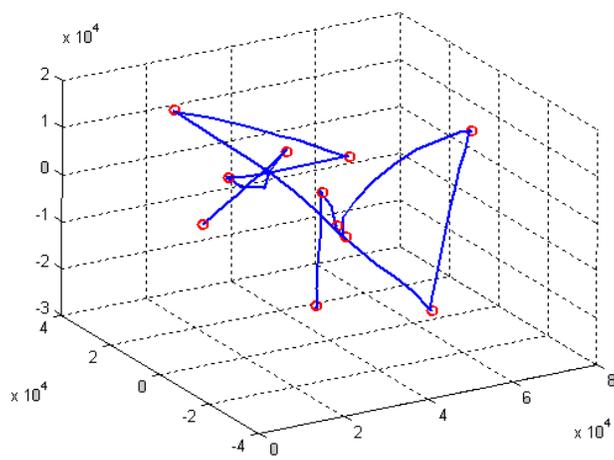


b) con ruido

Figura 6.19.- Evolución articular para FUNDMAT.

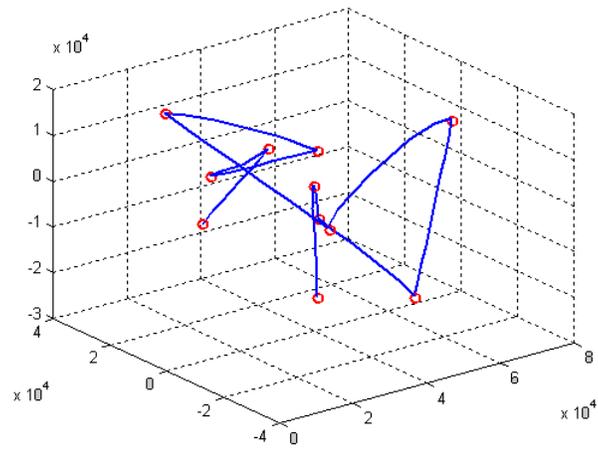


a) sin ruido

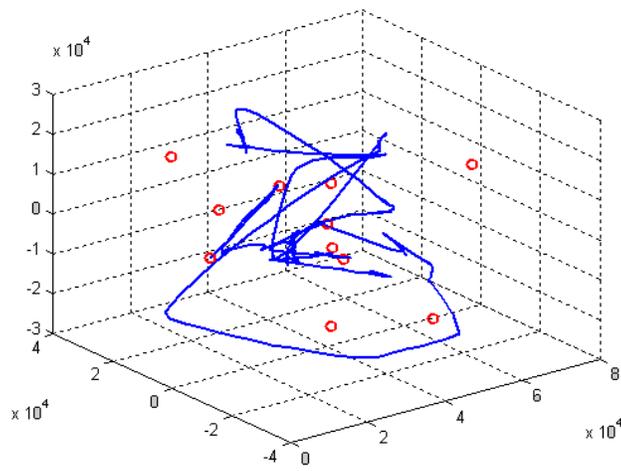


b) con ruido

Figura 6.20.- Evolución articular para el método RLS.



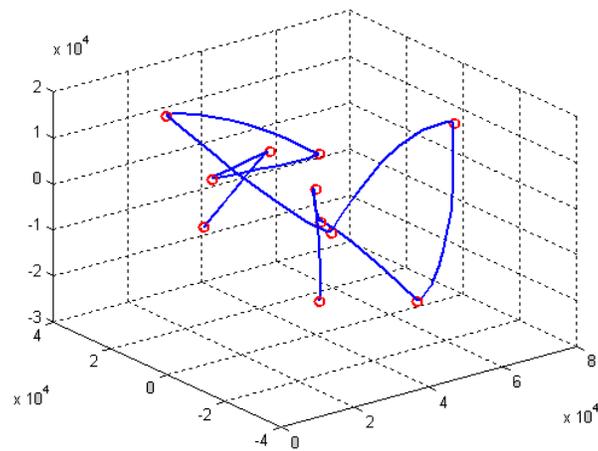
a) sin ruido



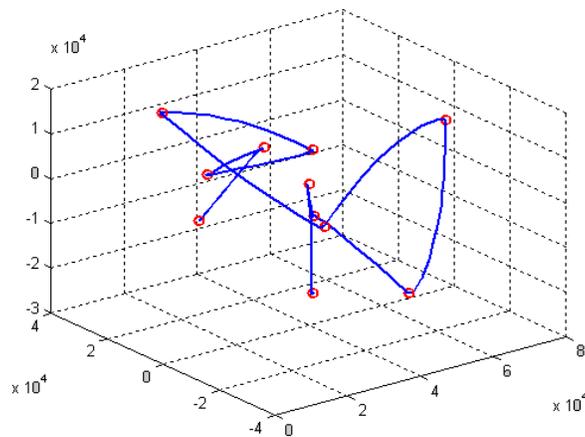
b) con ruido

Figura 6.21.- Evolución articular para el método de BROYDEN.

*Jacobiano Analítico de la Imagen.*



a) sin ruido



b) con ruido

Figura 6.22.- Evolución articular para el jacobiano analítico.

Se observa que en el espacio de las articulaciones, todos los algoritmos tienen un buen comportamiento en el caso sin ruido añadido. En el caso con ruido añadido, los métodos que se degradan considerablemente son BROYDEN y 3LAST, entre los que mejor se comportan ante el ruido se observa que son FUNDMAT y ANALÍTICO.

Teóricamente, si se considera distorsiones ya sea en la calibración de la cámara, la transformación cámara-robot, o en el jacobiano del robot, el jacobiano analítico debe deteriorarse al ser muy dependiente de estos parámetros (ver ecuación (6.8)). En la siguiente parte de los experimentos a fin de comprobar esta dependencia se ha degradado la transformación cámara-robot (matriz  $\mathbf{W}_{co}$  de la ecuación (6.8)) para calcular el jacobiano analítico. Se ha elegido degradar esta transformación por ser un parámetro constante en la expresión, y por la facilidad en su manipulación. La degradación inicial realizada era de un 10% tanto en la rotación como en la traslación,

con este nivel de degradación se observó que el sistema perdía el control. Se optó por degradar dicha transformación solamente un 5%, con las cuales se obtuvieron las gráficas siguientes (Figura 6.23 a Figura 6.26) para diferentes índices de evaluación, que incluyen los casos sin ruido añadido y con ruido añadido de  $\sigma = 1$ , además se le compara con la gráfica para el método FUNDMAT con ruido añadido de  $\sigma = 1$ :

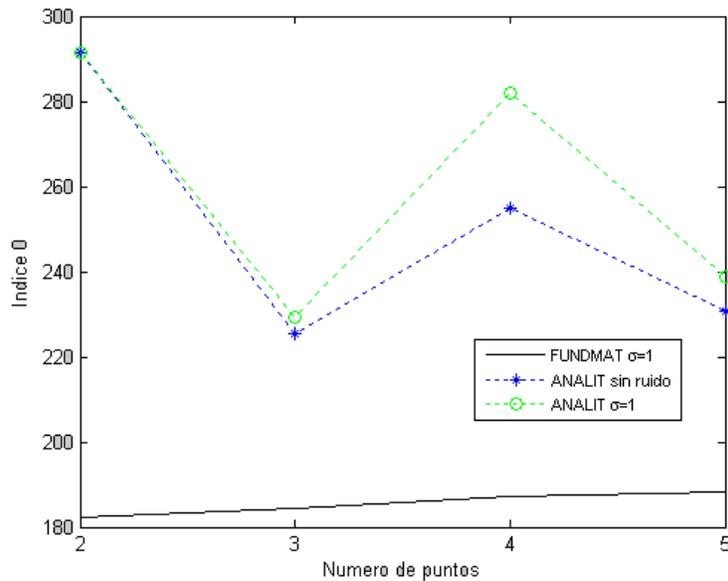


Figura 6.23.- Indice 0 con ruido.

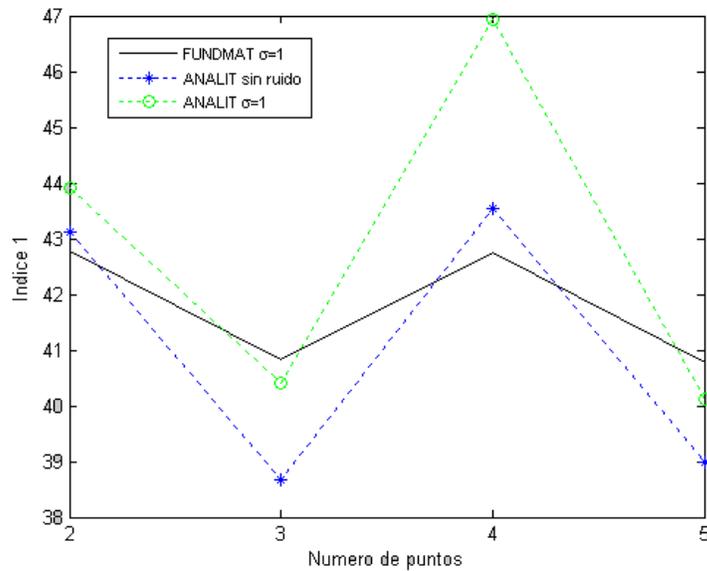


Figura 6.24.- Indice 1 con ruido.

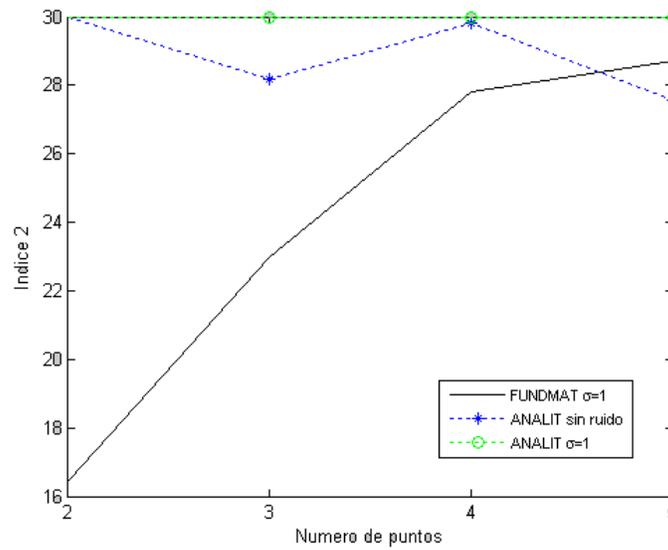


Figura 6.25.- Indice 2 con ruido.

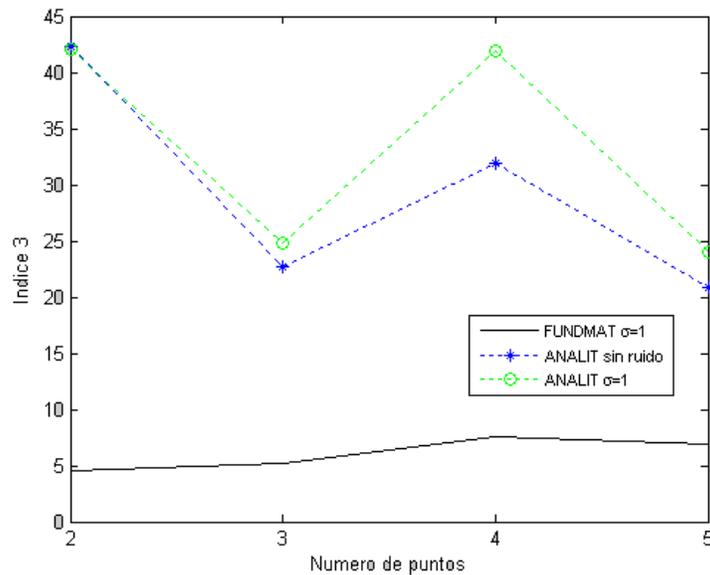


Figura 6.26.- Indice 3 con ruido.

Se observa que para todos los índices el método FUNDMAT tiene un mejor comportamiento frente al método ANALÍTICO. Se hace notar que la gráfica para el índice 1 (Figura 6.24) muestra un aparente buen comportamiento del método ANALÍTICO, pero si observamos la trayectoria generada en el espacio de las articulaciones (Figura 6.29), éste no alcanza las posiciones deseadas (círculos rojos); además por la propia definición de este índice como la suma de los desplazamientos realizados en cada movimiento intermedio en el espacio de articulaciones (apartado 5.3.2), se concluye que esta gráfica realmente no refleja un buen comportamiento del jacobiano ANALÍTICO.

Las siguientes gráficas (Figura 6.27 a Figura 6.29) muestran el comportamiento del jacobiano en el espacio de las articulaciones considerando cinco puntos del patrón para el método FUNDMAT y ANALÍTICO bajo las condiciones de degradación expuestas:

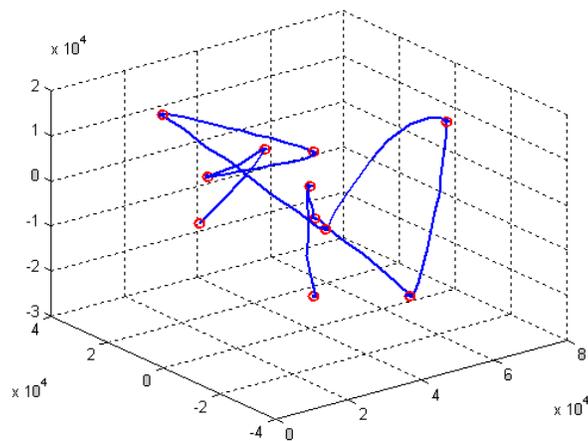


Figura 6.27.- Evolución articular para FUNDMAT  $\sigma = 1$ .

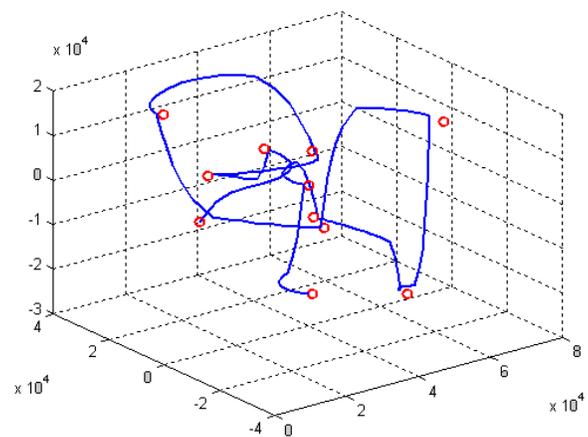


Figura 6.28.- Evolución articular para el jacobiano analítico con perturbación de la transformación cámara-robot del 5%, para  $\sigma = 0$

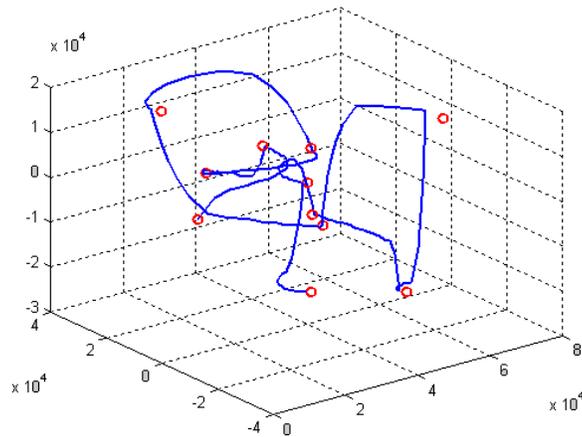


Figura 6.29.- Evolución articular para el jacobiano analítico con perturbación de la transformación cámara-robot del 5%, para  $\sigma = 1$ .

Se observa que la trayectoria seguida por el jacobiano ANALÍTICO se encuentra bastante distorsionada, a diferencia del método FUNDMAT que sigue una trayectoria aceptable, tampoco se observa diferencia entre el caso jacobiano ANALÍTICO  $\sigma = 0$  y jacobiano ANALÍTICO  $\sigma = 1$ .

### 6.3.2.2 CASO DINÁMICO.

Son pruebas de seguimiento realizadas en las mismas condiciones que las indicadas en el capítulo 5, es decir se sigue una trayectoria alabeada (Figura 5.32) dentro del espacio de trabajo. Inicialmente se presentan las gráficas sin ruido añadido, luego con ruido gaussiano añadido con valor de  $\sigma = 0.5$ . Los resultados numéricos se recogen en la Tabla 6.4.

Tabla 6.4.- Valores para los 3 índices para el jacobiano ANALÍTICO, caso dinámico, sin ruido y con ruido añadido de  $\sigma = 0.5$ .

CASO DINÁMICO					
	ÍNDICES	2 PUNTOS	3 PUNTOS	4 PUNTOS	5 PUNTOS
SIN RUIDO	Índice 0	14.235	15.159	15.333	15.172
	Índice 1*	3.356	3.374	3.375	3.392
	Índice 5*	0.436	0.274	0.307	0.537
CON RUIDO $\sigma = 0.5$	Índice 0	14.519	15.526	15.631	15.490
	Índice 1*	3.351	3.385	3.372	3.391
	Índice 5*	0.438	0.296	0.310	0.542

\* dividido por 1000

Capítulo 6

A partir de estos datos se han construido las gráficas de la Figura 6.30 a la Figura 6.32, donde se grafican también los métodos más representativos de estimación del jacoiano de la imagen, cuando se consideran dos, tres, cuatro y cinco puntos del patrón:

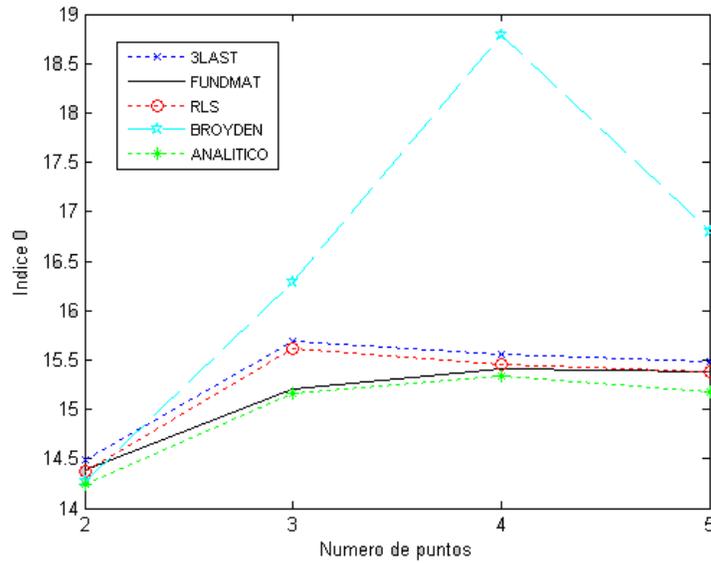


Figura 6.30.- Indice 0 sin ruido caso dinámico.

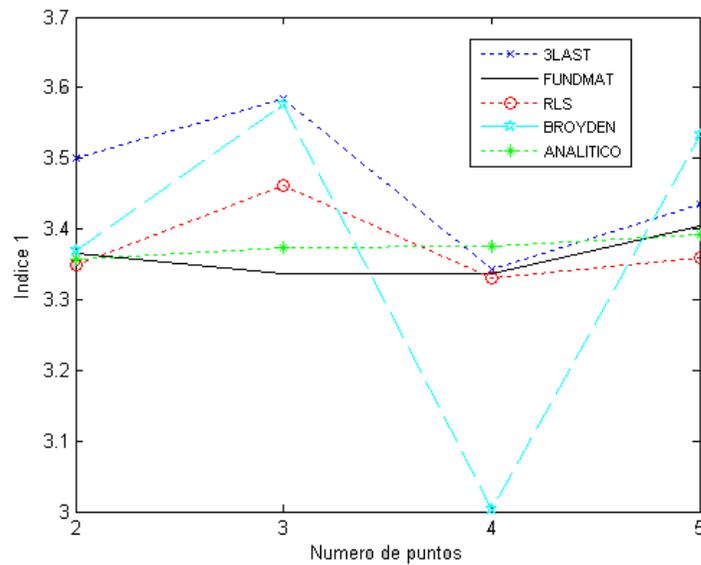


Figura 6.31.- Indice 1 sin ruido caso dinámico.

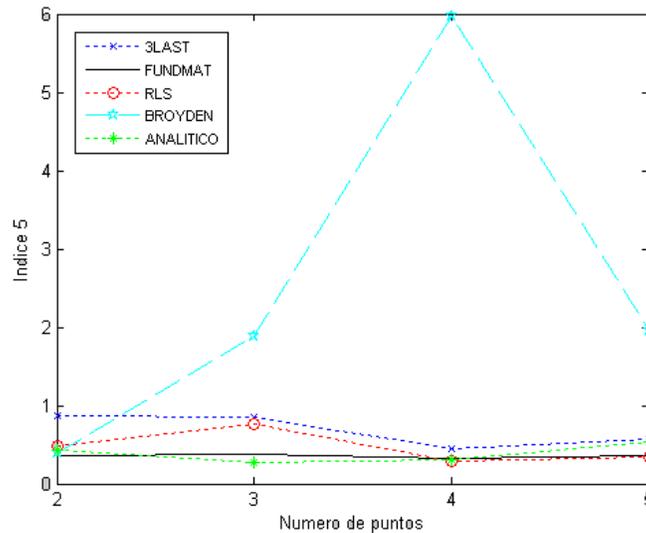


Figura 6.32.- Índice 5 sin ruido caso dinámico.

Se observa que para el índice 0 y el índice 5 todos los métodos tienen comportamiento uniforme excepto el método de BROYDEN que para cuatro puntos del patrón incrementa considerablemente su valor. En general los métodos ANALÍTICO y FUNDMAT son los que presentan mejor comportamiento. El comportamiento de los métodos de estimar el jacobiano es similar al obtenido en las gráficas del capítulo 5.

Las siguientes gráficas (Figura 6.33 a Figura 6.35) muestran el comportamiento de los métodos de estimar el jacobiano y el jacobiano ANALÍTICO bajo condiciones de ruido gaussiano añadido con  $\sigma = 0.5$  :

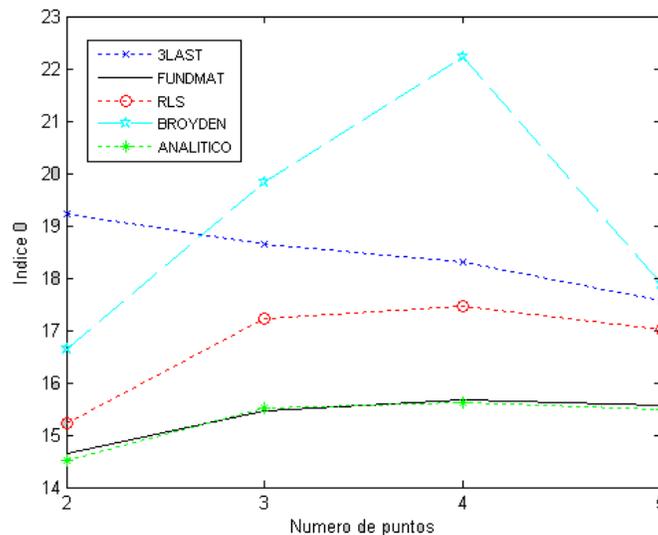


Figura 6.33.- Índice 0 con ruido caso dinámico.

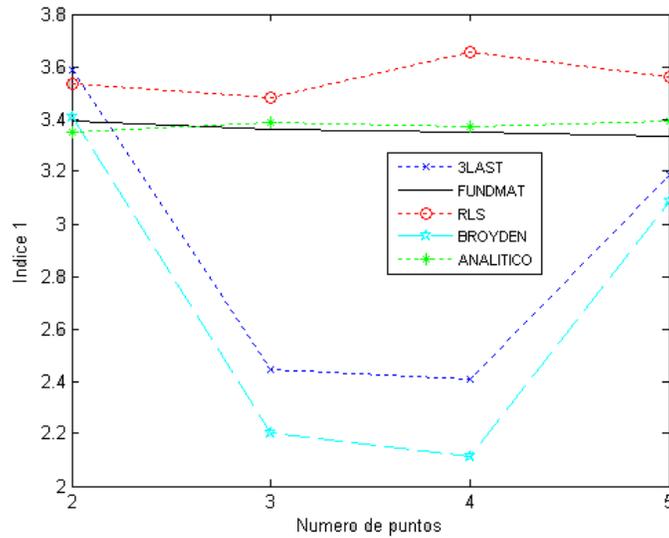


Figura 6.34.- Indice 1 con ruido caso dinámico.

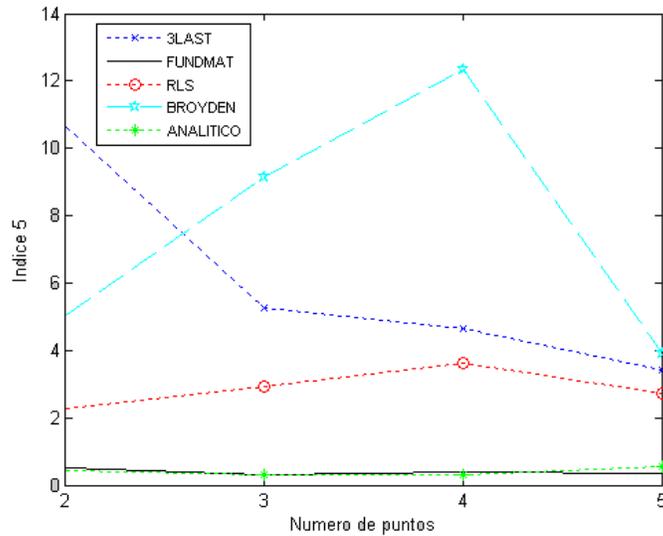
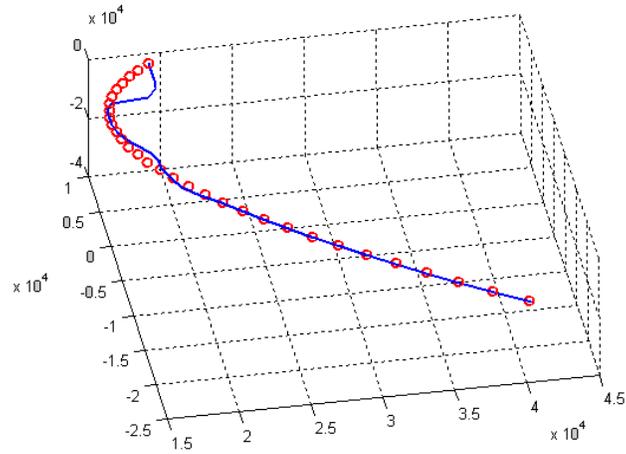


Figura 6.35.- Indice 5 con ruido caso dinámico.

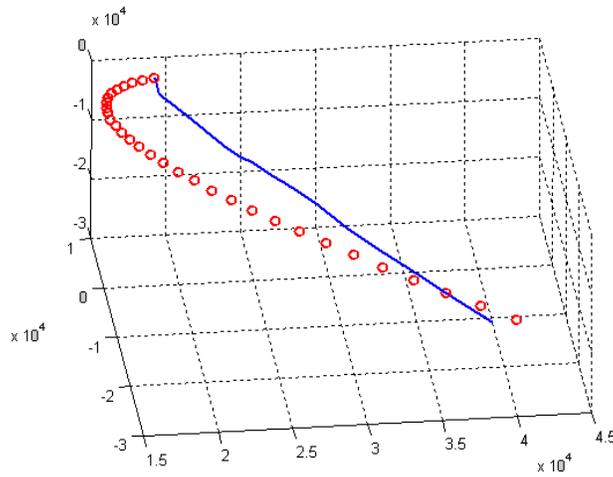
Se observa que los métodos que se han degradado considerablemente son BROYDEN y 3LAST, RLS se ha degradado en forma media, aún en estas condiciones los métodos FUNDMAT y ANALÍTICO muestran un buen comportamiento. Los resultados para el índice 1 (Figura 6.34) aparentemente reflejan un buen comportamiento para los métodos BROYDEN y 3LAST, especialmente para 3 y 4 puntos del patrón, pero, observando la trayectoria en el espacio de articulaciones que generan estos dos métodos de estimar el jacobiano (Figura 6.36 y Figura 6.39), y la definición del índice 1 (ver apartado 5.3.2) se deduce que esta gráfica no refleja un buen comportamiento, pues éstos no alcanzan en cada movimiento intermedio las posiciones deseadas.

*Jacobiano Analítico de la Imagen.*

A continuación se presentan gráficas (Figura 6.36 a Figura 6.40) de la trayectoria seguida en el sistema de las articulaciones considerando cinco puntos del patrón, para los métodos de estimación del jacobiano evaluados y el método ANALÍTICO, casos sin ruido añadido y con ruido añadido:



a)  $\sigma = 0$



b)  $\sigma = 0.5$

Figura 6.36.- Evolución articular para el método 3LAST caso dinámico.

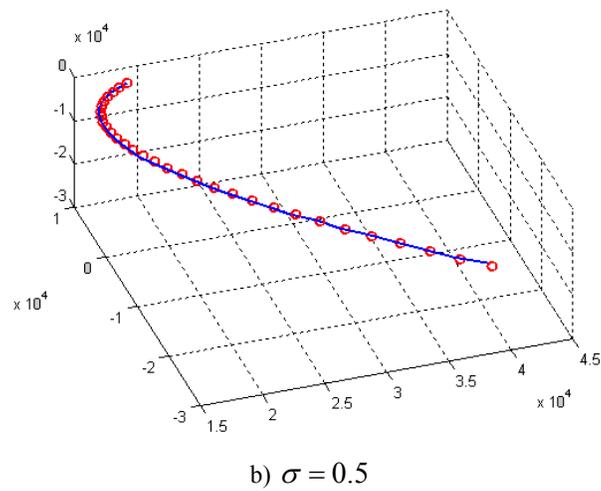
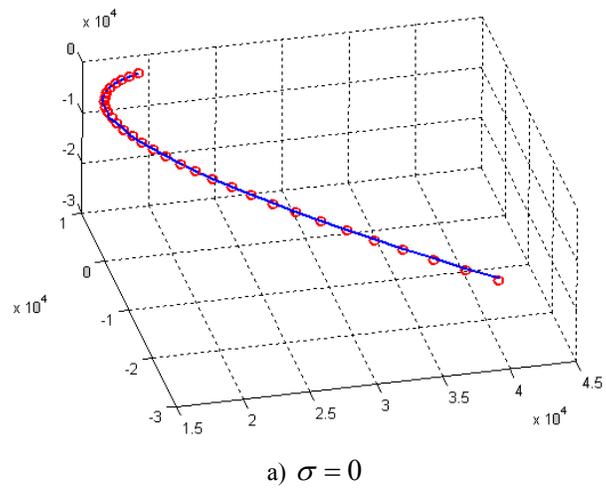
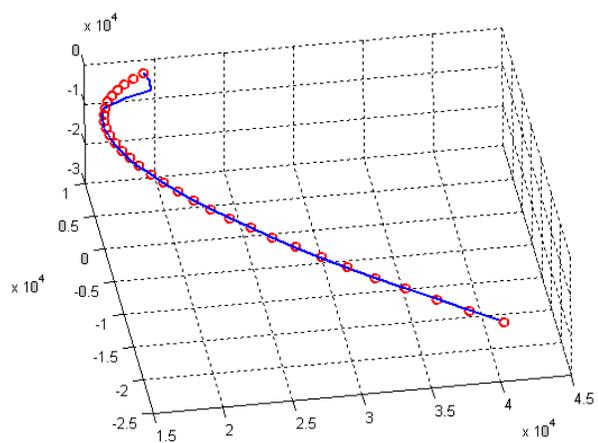
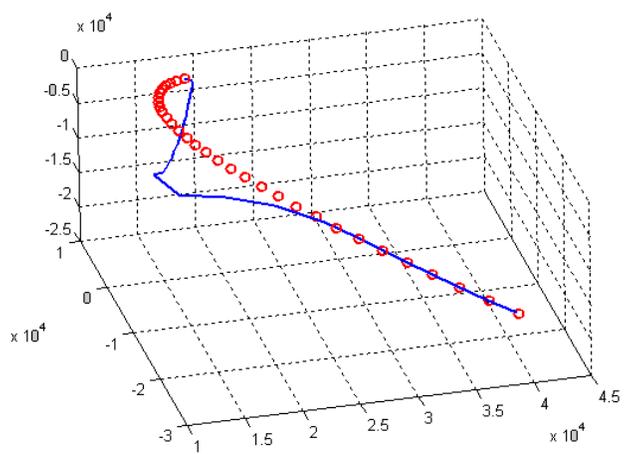


Figura 6.37.- Evolución articular para el método FUNDMAT caso dinámico.

*Jacobiano Analítico de la Imagen.*

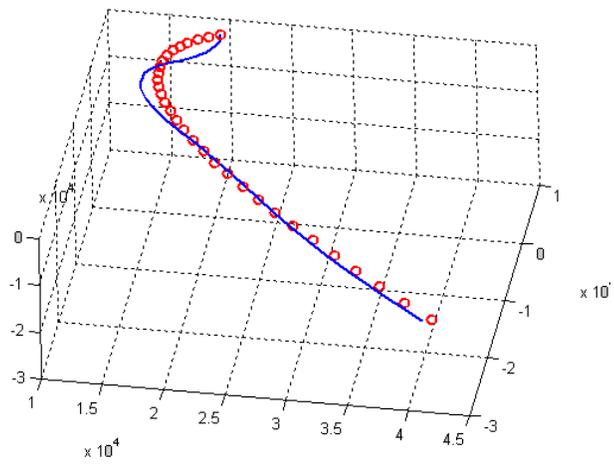


a)  $\sigma = 0$

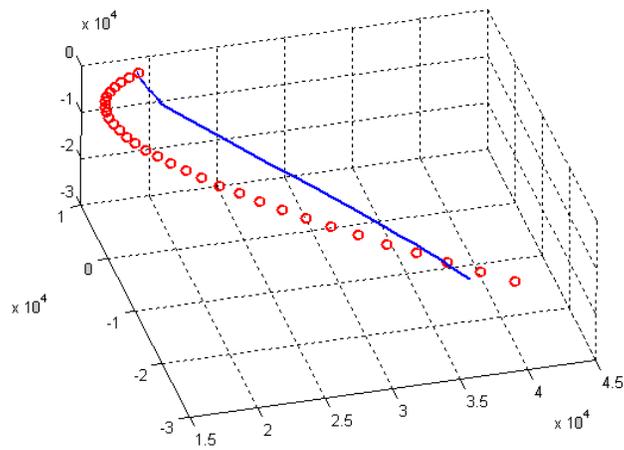


b)  $\sigma = 0.5$

Figura 6.38.- Evolución articular para el método RLS caso dinámico.



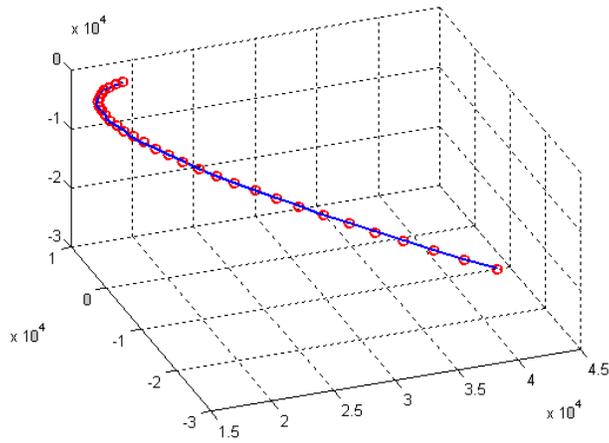
a)  $\sigma = 0$



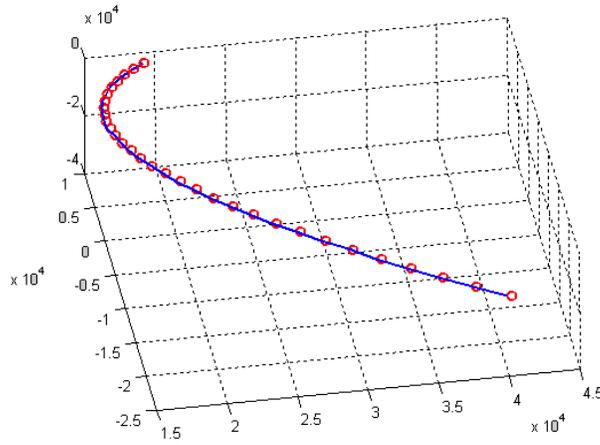
b)  $\sigma = 0.5$

Figura 6.39.- Evolución articular para el método de BROYDEN caso dinámico.

Jacobiano Analítico de la Imagen.



a)  $\sigma = 0$



b)  $\sigma = 0.5$

Figura 6.40.- Evolución articular para el jacobiano ANALÍTICO caso dinámico.

Se observa que la trayectoria inicial para los métodos FUNDMAT y ANALÍTICO es buena. En el caso sin ruido todos los métodos poseen un comportamiento aceptable a excepción del método de BROYDEN que tarda más que los demás en alcanzar la trayectoria correcta. Para el caso con ruido, BROYDEN, RLS, y 3LAST se degradan en forma considerada, manteniendo su buen comportamiento el método ANALÍTICO y FUNDMAT. Este resultado nos sugiere comparar ambos métodos endetalle como se muestra a continuación.

Al igual que en el caso estático se ha degradado la transformación cámara-robot (matriz  $\mathbf{W}_{co}$  de la ecuación (6.8)) en un 5% para el cálculo del jacobiano ANALÍTICO, se sabe que para una degradación del 10% ya no se controla el sistema. Las siguientes gráficas (Figura 6.41 a Figura 6.43) para los índices 0,1 y 5, muestran el comportamiento del jacobiano ANALÍTICO con degradación de la transformación cámara-robot del 5%,

Capítulo 6

con ruido añadido de  $\sigma = 1$  y sin ruido añadido, y se les compara con el método de estimar el jacobiano FUNDMAT con ruido añadido de  $\sigma = 1$ .

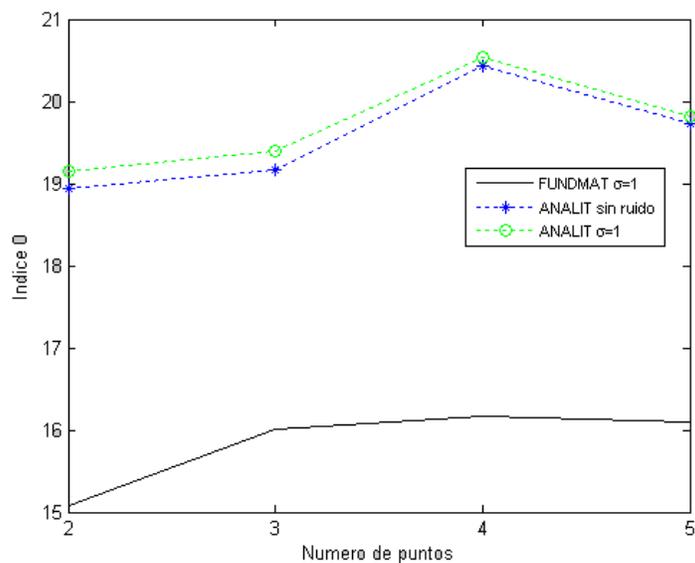


Figura 6.41.- Indice 0.

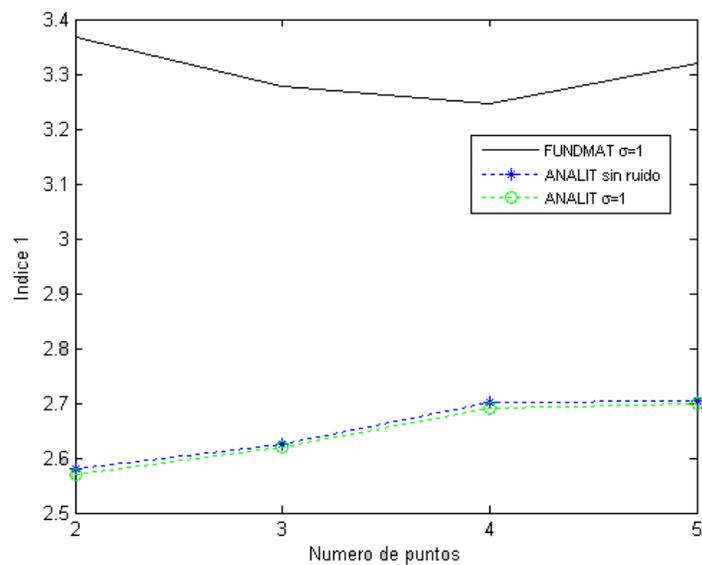


Figura 6.42.- Indice 1.

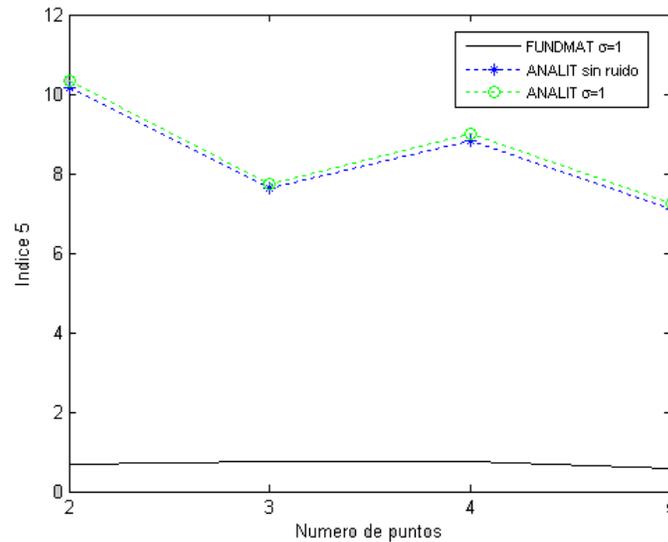


Figura 6.43.- Indice 5.

Para el índice 0 y 5, se observa que el método del jacobiano ANALÍTICO ha degradado fuertemente su comportamiento frente al método FUNDMAT, mientras que para el índice 1 (Figura 6.42) se puede afirmar lo mismo a pesar que la gráfica no lo refleja pero se explica al observar la trayectoria seguida por el control basado en este jacobiano ANALÍTICO con degradación de la transformación cámara-robot al 5% (Figura 6.45), y de la definición misma del índice 1 (ver apartado 5.3.2). Se puede ver también que para el jacobiano ANALÍTICO, el ruido añadido de  $\sigma = 1$  le afecta ligeramente, que puede concluirse que la degradación de la transformación cámara-robot es más importante que el ruido añadido en la detección de características hasta con un valor de  $\sigma = 1$ .

Las siguientes gráficas (Figura 6.44 y Figura 6.45) muestran el comportamiento en el espacio articular para el jacobiano ANALÍTICO con degradación de transformación cámara-robot de 5% para los casos con ruido añadido y sin ruido añadido, además se presenta la evolución para el método FUNDMAT con ruido añadido de  $\sigma = 1$ .

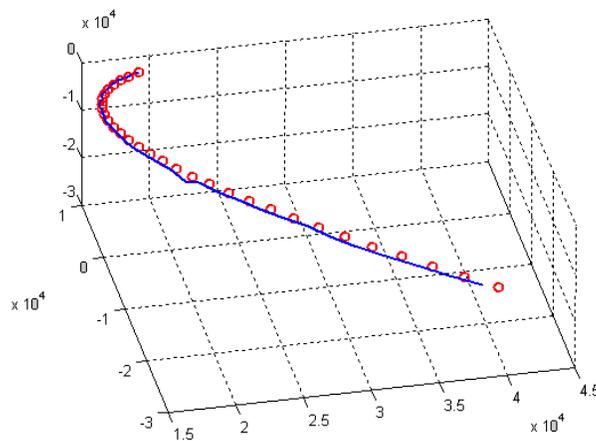
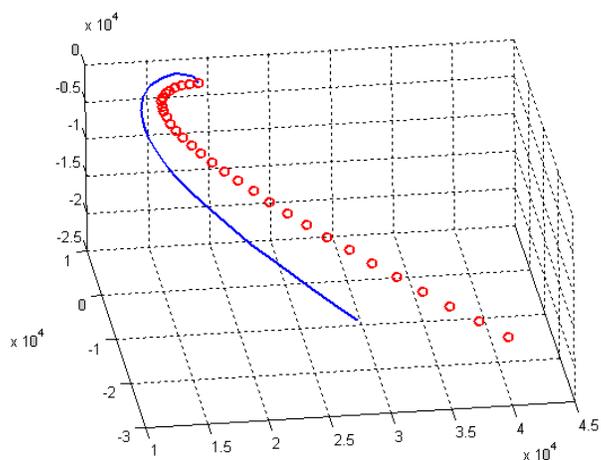
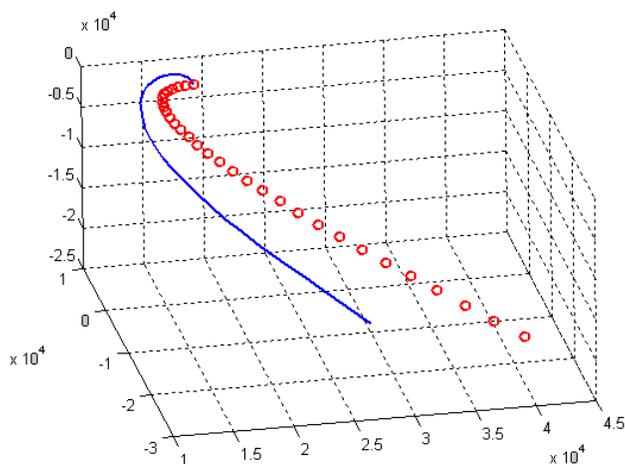


Figura 6.44.- Evolución articular para el método FUNDMAT  $\sigma = 1$ , caso dinámico.



a)  $\sigma = 0$



b)  $\sigma = 1$

Figura 6.45.- Evolución articular para el jacobiano analítico con perturbación de la transformación cámara-robot del 5%, caso dinámico.

Para el jacobiano ANALÍTICO, en el espacio de las articulaciones (Figura 6.45) se ve claramente la degradación de la evolución producida por la perturbación al 5% introducida en la transformación cámara-robot. Mientras que el método de estimar el jacobiano basado en la matriz fundamental FUNDMAT mantiene el seguimiento aún con este nivel de ruido ( $\sigma = 1$ ).

## **6.4 CONCLUSIONES.**

La determinación del jacobiano de la imagen analíticamente, es un proceso que involucra parámetros a determinarse fuera de línea y parámetros determinados en línea. El éxito de la tarea de control depende de la precisión en la determinación de cualquiera de estos parámetros.

Dentro de los parámetros fuera de línea se encuentran la calibración de la cámara, la calibración cinemática de la cámara (es decir la relación geométrica entre el centro óptico de la cámara y el origen del espacio de las articulaciones), y la calibración cinemática del robot. Lo que se traduce en una ardua labor previa en la determinación de estas relaciones.

Se necesita realizar en línea la reconstrucción 3D del punto en la escena visto por la cámara, o una aproximación del mismo (la coordenada Z), además de calcular el jacobiano del robot.

Se presentan también algunas conclusiones particulares:

### **6.4.1 DEL JACOBIANO ANALITICO**

El método basado en el jacobiano analítico resultó dar muy buenos resultados, gracias a la utilización de la información de la segunda cámara, pero en contraposición es el trabajo laborioso realizado previo a la tarea de control para conseguir la calibración de la cámara, la transformación entre cada cámara y el sistema del robot, además del jacobiano del robot.

Con la corrupción al 10% de la transformación cámara-robot, en el cálculo del jacobiano analítico, no controla el sistema.

La incorporación del desfase de ejes de rotación entre el segundo y tercer eslabón en el modelo cinemática del robot, influye muy poco en el desempeño del jacobiano analítico.

La influencia de la corrupción de la transformación robot-cámara en el control del sistema, es mayor que la influencia del ruido en la detección de las características visuales.

### **6.4.2 DE LA CALIBRACIÓN CÁMARA-ROBOT.**

Se ha llevado a cabo la calibración cámara-robot entre la base del robot y cada uno de los sistemas de coordenadas de la cámara, utilizando el método de puntos 3D pertenecientes a posiciones aleatoriamente obtenidas dentro del espacio de trabajo pertenecientes a ambos sistemas. Por intuición se espera obtener resultados más exactos a medida que se incrementa el número de posiciones del robot, de los resultados obtenidos se observó que 15 posiciones son suficientes para considerar los resultados aceptables, pues, no se observó diferencias sustanciales en los resultados con mayor número de posiciones.

### **6.4.3 DE LA COMPARACIÓN ENTRE EL JACOBIANO ESTIMADO Y EL JACOBIANO ANALÍTICO.**

El control basado en el jacobiano analítico produjo buenos resultados tanto en condiciones sin ruido como con ruido añadido, en el caso estático como en el caso dinámico, siempre y cuando este ruido añadido considere sólo ruido en la detección de las características visuales. Inclusive si incrementamos más el nivel de ruido añadido, esto se debe a la exactitud en las labores previas de calibración de cámaras, transformación cámara-robot y jacobiano del robot.

Si se considera ruido en cualquiera de las relaciones anteriores, el funcionamiento del jacobiano analítico se deteriora.

La principal desventaja del jacobiano analítico radica en la necesidad de realizar cálculos previos y de gran exactitud. Del nivel de esta exactitud de estas relaciones depende el éxito del control derivado del uso de este jacobiano.

Se ha comprobado que el tiempo de cálculo del jacobiano analítico, es ligeramente mayor al perteneciente al método de estimación basado en la matriz fundamental.

# CAPITULO 7

## 7 CONTROL VISUAL A PARTIR DE LÍNEAS.

### 7.1 INTRODUCCIÓN.

Las características visuales que representan centros de gravedad de puntos o marcas en la imagen, tienen un uso generalizado en control visual, por la robustez en su detección, y la facilidad de implementación de los algoritmos de control basados en ellas.

La elección del tipo de características depende de su disponibilidad en la imagen (geometría de los objetos a controlar) y de la confiabilidad en su detección. Cuando los puntos en la imagen no son disponibles con facilidad, otro tipo de características como líneas, contornos, momentos, etc. pueden ser utilizados. En algunas aplicaciones es conveniente la extracción y el seguimiento de líneas como características visuales como por ejemplo el seguimiento de trayectorias rectas (como una autopista) [170] o trabajos con piezas industriales [1], u objetos planos con forma cuadrangular [64].

En este capítulo se describen dos métodos para realizar el control visual del sistema articular utilizando líneas como características visuales. El jacobiano de la imagen se estima en línea mediante el método de los últimos movimientos realizados [174], para esta estimación se utilizan características visuales de las líneas detectadas. Este punto no ha sido considerado en algún otro trabajo de investigación, por lo que constituye un aporte del presente trabajo. A fin de contrastar resultados se ha implementado también el jacobiano analítico para líneas [47], aunque acondicionado para un sistema de dos cámaras, para los casos con y sin ruido añadido como se verá en la parte experimental del presente capítulo.

## 7.2 REPRESENTACIÓN DE LÍNEAS.

Una línea 3D puede ser adecuadamente representada por una 6-tupla  $\mathbf{L} = (\mathbf{L}_d, \mathbf{L}_v)$ , siendo  $\mathbf{L}_d \in \mathfrak{R}(3)$  un punto fijo de la línea y  $\mathbf{L}_v \in \mathfrak{R}(3)$  un vector unitario que representa la dirección de la línea; ambos son conocidos como las coordenadas de Plücker [64]. Una nueva representación de líneas llamada coordenadas binormalizadas de Plücker (Figura 7.1) se presenta en [6], estando compuesta por una dupla  $(\mathbf{n}, \mathbf{u})$  donde  $\mathbf{n}$  es un vector perpendicular al plano formado por la línea 3D y el centro óptico de la cámara (llamado plano de interpretación [6], o plano de pre imagen [109]), y  $\mathbf{u}$  es la dirección 3D de la línea.

Un plano en el espacio 3D está representado por la ecuación:

$$aX + bY + cZ = d \quad \text{ó} \quad \mathbf{n}^T \mathbf{X} = d \quad (7.1)$$

donde  $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^T$  es un punto en el espacio 3D,  $\mathbf{n} = (a, b, c)^T$  es un vector normal al plano y  $d$  es la distancia del plano al origen del sistema de coordenadas. Si el plano pasa por el centro óptico de la cámara, entonces  $d = 0$ , (plano de interpretación), entonces se cumple que:  $aX + bY + cZ = 0$ , este plano en el espacio 3D se dibujaría como se muestra en la siguiente figura:

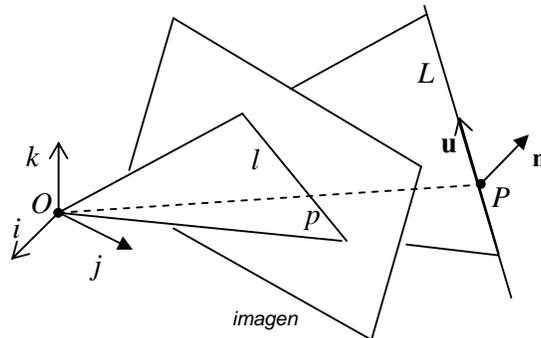


Figura 7.1.- Interpretación geométrica de las coordenadas normalizadas de Plücker.

dividiendo por  $Z$  (y considerando la distancia focal  $f = 1$ ), se obtiene:  $au + bv + c = 0$  ó reescribiéndola:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^T (\mathbf{u}, \mathbf{v}, 1) = 0 \quad (7.2)$$

que es la ecuación de la línea  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^T$  en el plano de la imagen y que a la vez representa la intersección entre el plano de interpretación y el plano de la imagen, donde  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, 1)^T$  son coordenadas normalizadas de la imagen. Se concluye que los elementos de esta línea en la imagen son los elementos del vector normal  $\mathbf{n}$  al plano de interpretación.

Usando solamente una cámara, no es posible controlar la posición 3D de la línea que descansa en el plano de interpretación sin la ayuda de ningún otro dispositivo. Pero si se

utilizan dos cámaras, la segunda ayudará a determinar la posición y orientación 3D de esta línea como la intersección de sus respectivos planos de interpretación, como se muestra en la siguiente figura:

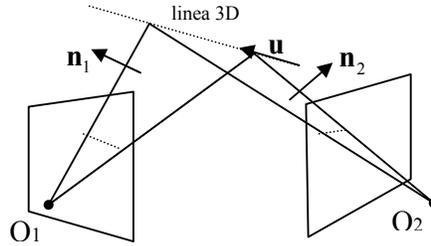


Figura 7.2.- Dos vistas de una línea 3D y sus planos de interpretación.

La orientación  $\mathbf{u}$  de la línea 3D también puede ser determinada por medio del producto cruz de las normales  $\mathbf{n}_1$  y  $\mathbf{n}_2$  a ambos planos de interpretación:

$$\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \quad (7.3)$$

Así también, el vector normal  $\mathbf{n}$  al plano de interpretación, puede ser hallado como el producto cruz entre los vectores de posición  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  de dos puntos pertenecientes a la línea 3D:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2}{\|\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2\|} \quad (7.4)$$

La representación canónica de la línea en el plano de la imagen es

$$au + bv + c = 0 \quad (7.5)$$

sin embargo, esta representación tiene el problema de que tanto la pendiente como el término independiente se hacen infinitos a medida que la línea se hace vertical. Por lo que es más conveniente definir la línea utilizando la llamada representación normal de la línea  $(\theta, \rho)$  (Figura 7.3):

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \rho \quad (7.6)$$

donde  $\theta$  y  $\rho$  son características de la línea en la imagen definidas como

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right), \quad \rho = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (7.7)$$

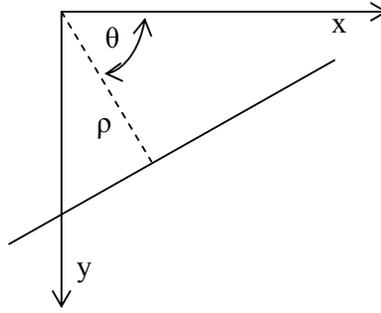


Figura 7.3.- Representación normal de una línea.

### 7.3 MATRIZ DE INTERACCIÓN A PARTIR DE LÍNEAS.

En base a los parámetros de la representación normal de la línea, se construye la matriz de interacción  $\mathbf{J}_v$  para líneas [47] como se describe en el apartado 4.2.2:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} \lambda_\theta \cos \theta & \lambda_\theta \sin \theta & -\lambda_\theta \rho & -\rho \cos \theta & -\rho \sin \theta & -1 \\ \lambda_\rho \cos \theta & \lambda_\rho \sin \theta & -\lambda_\rho \rho & (1 + \rho^2) \sin \theta & -(1 + \rho^2) \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

con  $\lambda_\theta$  y  $\lambda_\rho$  son parámetros que dependen de los parámetros de la línea y del plano que contiene a la línea. En caso de más líneas, las filas de sus respectivas matrices de interacción son apiladas. Igual que en el caso del jacobiano analítico para puntos en la imagen (6.6), se calcula un jacobiano analítico para líneas, de la forma:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}_v \mathbf{W}_{co} \mathbf{N} \mathbf{J}_R \dot{\mathbf{q}} \quad (7.9)$$

donde  $\dot{\mathbf{s}} = [\dot{\theta} \quad \dot{\rho}]^T$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  vector con variación de articulaciones, y  $\mathbf{W}_{co}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{J}_R$  son los mismos parámetros que se describen en el apartado 6.1.

Para el presente caso de control visual con dos cámaras, simplemente se apilan los jacobianos analíticos pertenecientes a cada cámara como se describió en el apartado 4.4.

### 7.4 MÉTODOS DE CONTROL PROPUESTOS.

#### 7.4.1 PRIMER METODO.

En geometría proyectiva las direcciones 3D tienen solamente dos grados de libertad, si el vector normal al plano de interpretación es un vector unitario  $\mathbf{n} = [n_x \quad n_y \quad n_z]$ , sus elementos representan los cosenos directores con referencia al sistema de la cámara considerada. Dos de ellos son suficientes para representar la dirección del vector, y por

lo tanto son tomados como características de este vector (puede utilizarse ya sea  $(n_x, n_z)$  o  $(n_y, n_z)$ ). Si se tiene una sola cámara es imposible recuperar información 3D de la línea pues se sabría que la línea yace en el plano de interpretación pero no se sabría nada acerca de su orientación en este mismo plano (Figura 7.1). Si se considera una segunda cámara, la orientación 3D puede ser detectada como la intersección de ambos planos de interpretación (Figura 7.2), por cada línea se tienen cuatro parámetros para controlar el sistema: dos de la primera cámara y dos de la segunda cámara. El vector construido a partir de ellos tiene la forma:

$$\mathbf{s} = [n_{1y} \quad n_{1z} \quad n_{2y} \quad n_{2z}]^T \quad (7.10)$$

donde los subíndices 1 y 2 significa primera y segunda cámara. El jacobiano de la imagen a ser estimado tiene dimensión  $4 \times n$ , donde  $n$  es el número de grados de libertad del sistema articular. Para mayor número de líneas, simplemente se apilan los datos para obtener un jacobiano de dimensión  $4m \times n$  siendo  $m$  el número de líneas.

A partir de una posición inicial, realizando la cantidad de movimientos necesarios para conseguir que (4.25) sea de rango completo  $n$  y construir un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (7.11)$$

donde  $\mathbf{A}$  es construida a partir de los cambios en articulaciones  $\Delta \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{x}$  es un vector con los elementos del jacobiano  $\mathbf{J}$  buscado, y  $\mathbf{b}$  es construido a partir de los cambios en características  $\Delta \mathbf{s}$ . Esta ecuación es resuelta en base a mínimos cuadrados.

Como lo indica la expresión (7.2),  $(a, b, c)$  son características normalizadas de la imagen, por lo que es necesario el conocimiento de la calibración de ambas cámaras. En adelante, este método se referirá como el nombre de NORM.

#### 7.4.2 SEGUNDO MÉTODO.

En este método se utilizan las características de la representación normal de la línea. Las características  $(\theta, \rho)$  son medidas directamente en la imagen, por lo que no es necesaria la calibración de las cámaras, realizándose un esquema de control visual 2D para controlar el sistema. El vector con las características de ambas imágenes tiene la forma:

$$\mathbf{s} = [\theta_1 \quad \rho_1 \quad \theta_2 \quad \rho_2]^T \quad (7.12)$$

de igual modo los subíndices 1 y 2 significan la primera y segunda cámara, y la dimensión del jacobiano a ser estimado tiene dimensión  $4m \times n$  donde  $m$  es el número de líneas, y  $n$  es el número de grados de libertad del sistema a controlar.

Como  $\theta$  pertenece al intervalo  $[\pi, -\pi]$ , y  $\rho$  a  $[0, 960]$  (para una imagen de 768x576 pixeles, Figura 7.3), en la minimización del sistema lineal de la forma  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  se debe

considerar la distancia de Mahalanobis para tomar en cuenta la disimilitud entre  $\theta$  y  $\rho$ , entonces la función a minimizar tiene la forma:

$$\min_x (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) \quad (7.13)$$

donde  $\mathbf{W}$  es una matriz diagonal definida positiva  $4m \times 4m$  con las varianzas  $\sigma^2$  de las características  $\theta$  y  $\rho$  de las líneas. Este método será referido en el futuro con el nombre de THRH.

## 7.5 LEY DE CONTROL.

Se utiliza una ley de control estática como la descrita en el apartado 5.1, con más características que grados de libertad. La ley de control es proporcional basada en la pseudoinversa del jacobiano de la imagen [85]:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \lambda \mathbf{J}^+ \mathbf{e}_k \quad (7.14)$$

siendo  $\mathbf{J}^+ = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T$  la pseudoinversa del jacobiano, y  $\lambda$  una constante positiva que regula la velocidad de convergencia, y  $\mathbf{e}_k = (\mathbf{s}^* - \mathbf{s}_k)$ , donde  $\mathbf{s}^*$  y  $\mathbf{s}_k$  son vectores de características pertenecientes a las posiciones deseada y actual en el momento  $k$  respectivamente

Cuando  $\|\mathbf{e}_k\|$  sea menor que un umbral adecuado, se considera que el sistema ha alcanzado las características deseadas.

## 7.6 EXPERIMENTOS REALIZADOS.

Se han implementado los dos métodos propuestos de estimación del jacobiano de la imagen a partir de líneas y a fin de contrastar resultados, también se ha implementado un tercer método a partir del jacobiano analítico para líneas según la expresión (7.8).

Tanto el sistema de visión como el sistema articular es el mismo que el utilizado para los experimentos de capítulos anteriores (ver apartado 3.4.1), es decir un sistema de dos cámaras en configuración cámara fija. En el último eslabón del sistema articular se ha fijado una pieza de forma triangular de color negro (Figura 3.22). Esta pieza descansa sobre un fondo blanco y las líneas a ser detectadas son los bordes de esta pieza.

El sistema de visión está completamente calibrado, es decir se conoce los parámetros intrínsecos de ambas cámaras y la transformación entre ellas. Las cámaras están separadas 939 mm, y distan del objeto a controlar unos 1200 mm. A fin de implementar el jacobiano analítico para líneas también se cuenta con la cinemática directa, el jacobiano del robot para el sistema articular utilizado, y la transformación entre la base del robot y cada cámara.

### 7.6.1 TAREA DE ALINEAMIENTO.

Las pruebas llevadas a cabo fueron tareas de alineamiento. Empezando de una posición de inicio, las líneas que representan a los bordes de la pieza triangular deben ser alineadas con las líneas de los bordes de la pieza en la posición final (deseada). De igual modo, se ha considerado alcanzar un elevado número de posiciones obtenidas aleatoriamente en todo el espacio de trabajo a fin de obtener resultados más representativos. Se cuenta como máximo con 30 posiciones intermedias entre una posición de inicio y otra deseada.

Al igual que en anteriores experimentos, se han obtenido todas las características visuales deseadas previamente a través de la técnica de a teach-by-showing [98]. Los umbrales de error para considerar que el sistema ha alcanzado la posición deseada han sido los valores 0.001 para el método NORM; de 0.05 radianes y 0.5 píxeles para el método THRH; y de 0.01 y 0.001 para el método ANALÍTICO.

En las pruebas realizadas se toma en cuenta el número de líneas, y el ruido añadido (gaussiano) en la detección de las características visuales. Como índice de evaluación se ha considerado medir el error medio para cada una de las posiciones intermedias.

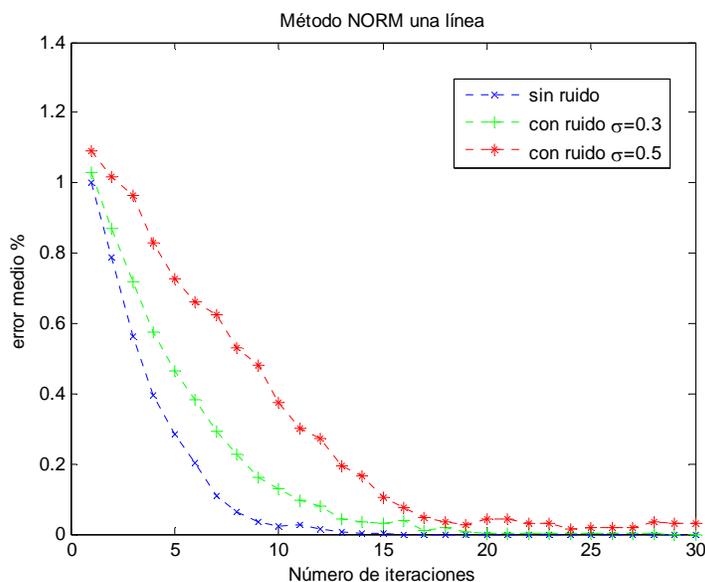


Figura 7.4. Método NORM, error medio en % VS número de iteraciones usando una línea, casos: sin ruido, y con ruido añadido de  $\sigma = 0.3$  y  $\sigma = 0.5$ .

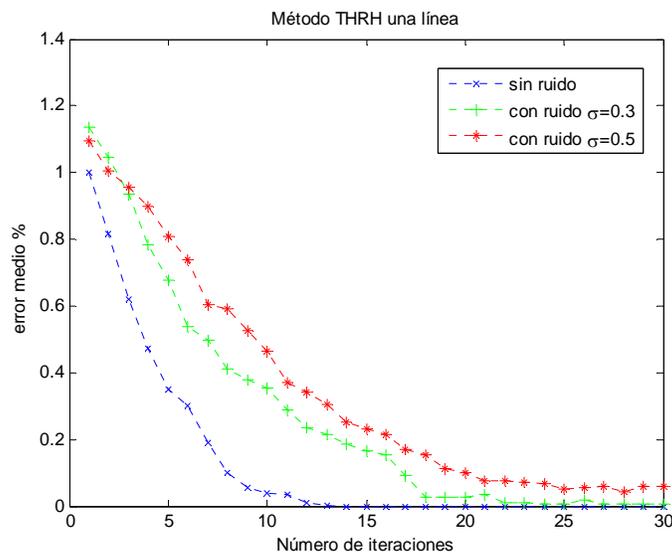


Figura 7.5. Método THRH, error medio en % VS número de iteraciones usando una línea, casos: sin ruido, y con ruido añadido de  $\sigma = 0.3$  y  $\sigma = 0.5$ .

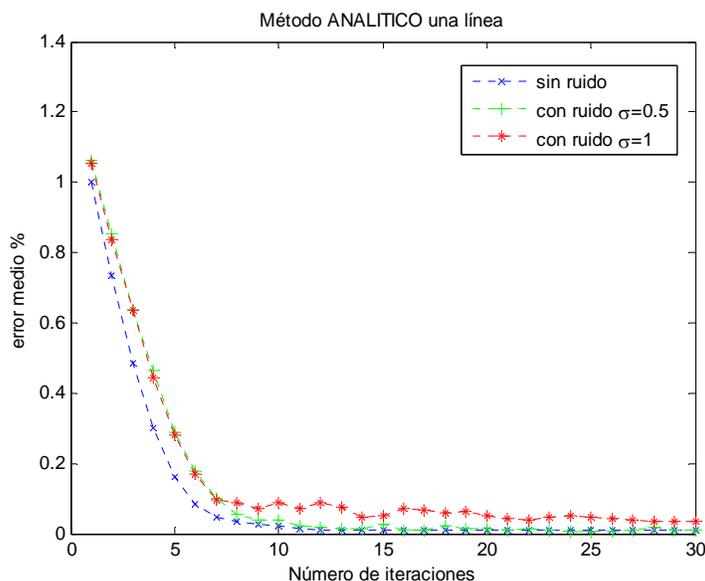


Figura 7.6. Método ANALITICO, error medio en % VS número de iteraciones usando una línea, casos: sin ruido, y con ruido añadido de  $\sigma = 0.5$  y  $\sigma = 1.0$ .

Los gráficos muestran el error medio en porcentaje versus el número de iteraciones (posiciones intermedias) para los casos: sin ruido añadido y con ruido añadido para diferentes niveles de  $\sigma$ . Valores en porcentaje han sido calculados para superar las diferencias de magnitud en los errores entre uno y otro método. Se presentan resultados obtenidos para una línea (Figura 7.4 a Figura 7.6), y tres líneas (Figura 7.7 a Figura 7.9).

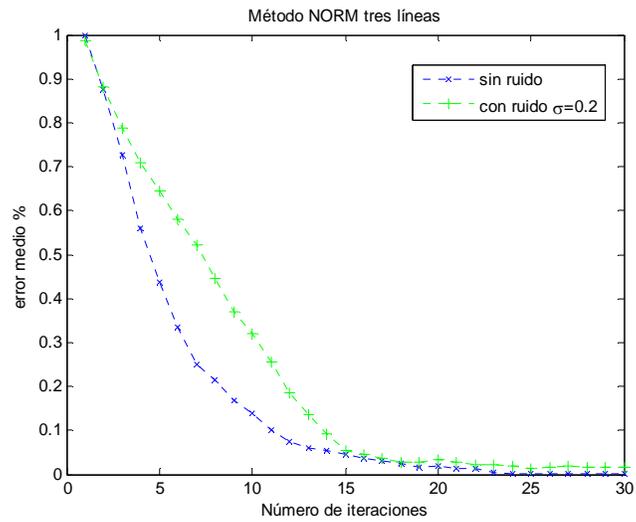


Figura 7.7. Método NORM, error medio en % VS número de iteraciones para usando tres líneas, casos: sin ruido, y con ruido añadido de  $\sigma = 0.2$ .

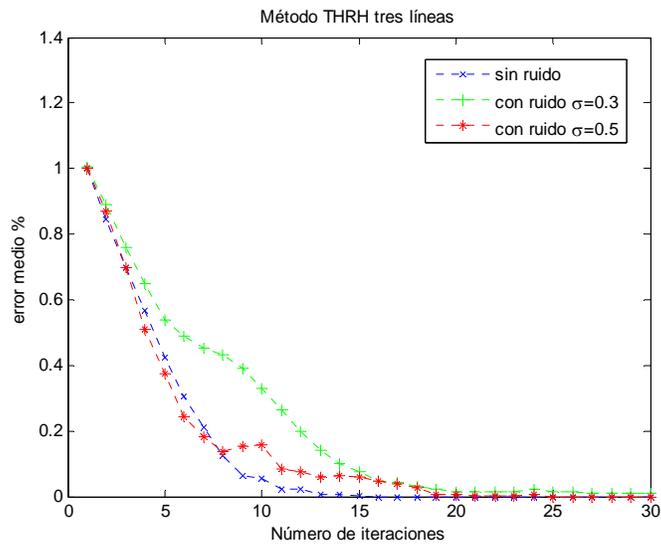


Figura 7.8. Método THRH, error medio en % VS número de iteraciones para usando tres líneas, casos: sin ruido, y con ruido añadido de  $\sigma = 0.3$  y  $\sigma = 0.5$ .

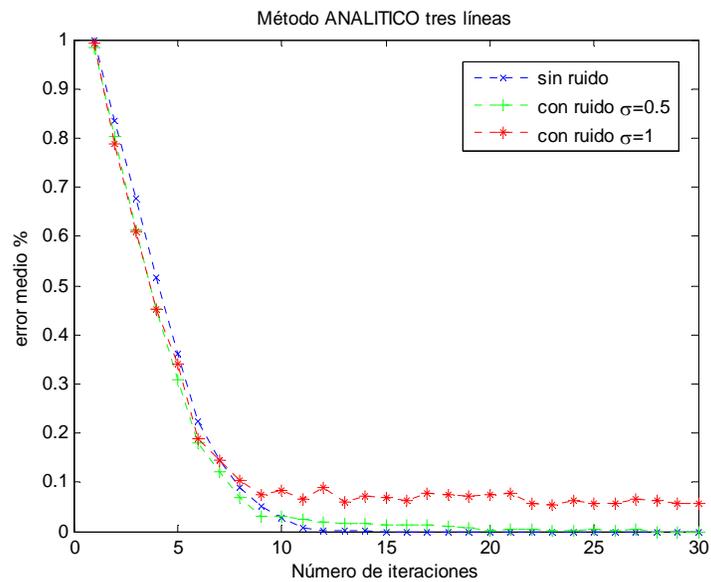


Figura 7.9. Método ANALITICO, error medio en % VS número de iteraciones usando tres líneas, casos: sin ruido, y con ruido añadido de  $\sigma = 0.5$  y  $\sigma = 1.0$ .

A partir de estas gráficas se observa que todos los métodos realizan la tarea de control. Sin ruido y con ruido, el método analítico posee un mejor comportamiento que los demás. Con ruido, el método NORM sólo controla el sistema hasta un valor de  $\sigma = 0.5$  usando una línea y hasta  $\sigma = 0.2$  usando tres líneas, mientras que THRH hasta  $\sigma = 0.5$  para el control tanto con una como con tres líneas.

También se presentan gráficas en 3D en el sistema de las articulaciones para diez posiciones deseadas (Figura 7.10 a Figura 7.12), se observa que mayor suavidad en la trayectoria generada se obtiene con el método analítico.

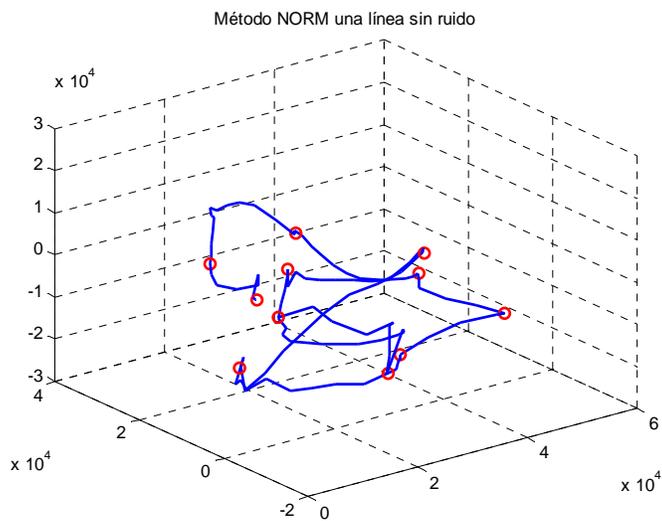


Figura 7.10. Evolución en articulaciones para 10 posiciones, método NORM considerando una línea sin ruido.

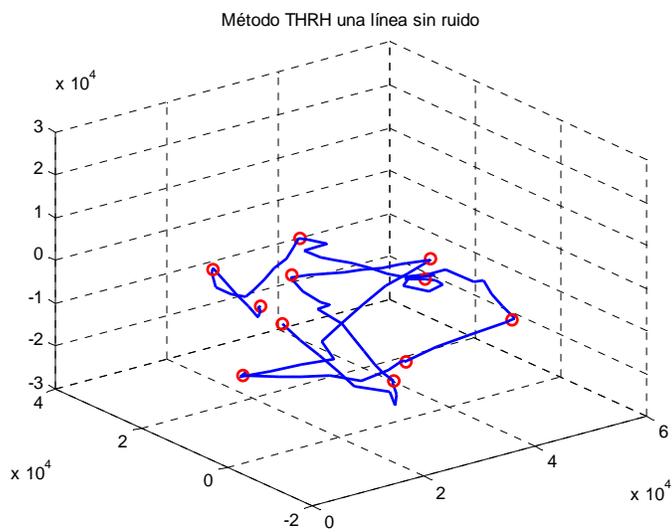


Figura 7.11. Evolución en articulaciones para 10 posiciones, método THRH considerando una línea sin ruido.

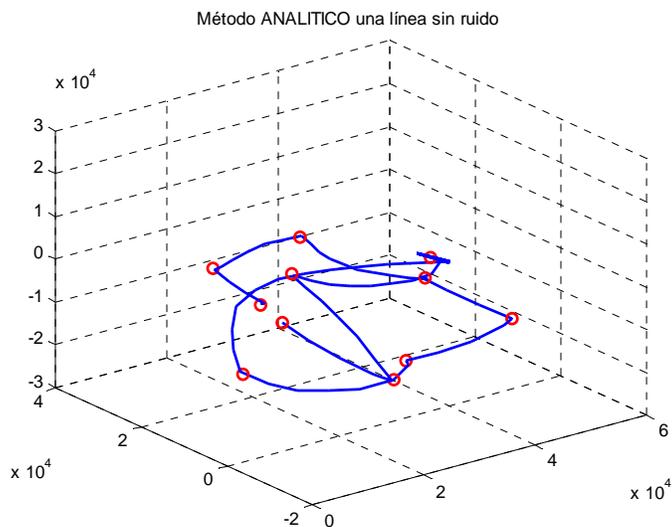


Figura 7.12. Evolución en articulaciones para 10 posiciones, método ANALÍTICO considerando una línea sin ruido.

En la tabla Tabla 7.1 se muestra el promedio del número de movimientos necesarios para alcanzar las características deseadas para los tres métodos implementados. Hay que destacar que en las pruebas con ruido realizadas con dos líneas y tres líneas, con el método NORM no se toleran valores superiores de  $\sigma = 0.2$ .

Tabla 7.1.- Promedio del número de pasos de establecimiento.

Método	Ruido	1 Línea	2 Líneas	3 Líneas
NORM	sin ruido	10.00	11.54	17.00
	$\sigma = 0.2$	11.95	21.54	26.45
	$\sigma = 0.3$	14.27	----	----
	$\sigma = 0.5$	19.72	----	----
THRH	sin ruido	9.36	8.90	9.63
	$\sigma = 0.3$	15.54	10.36	17.72
	$\sigma = 0.5$	23.09	12.54	29.27
ANALIT	sin ruido	8.27	6.90	8.18
	$\sigma = 0.5$	14.27	7.90	12.36
	$\sigma = 1.0$	24.72	19.54	29.18

## **7.7 CONCLUSIONES.**

Información de una segunda cámara ha sido utilizada para determinar orientación espacial de una línea 3D, y considerando las propiedades del plano de interpretación, ha sido presentado un método (NORM) para controlar el sistema basado en el alineamiento de los planos de interpretación que corresponden a la posición actual y deseada de la línea

El segundo método implementado (THRH) utiliza mediciones directas de las características de las líneas en el plano de la imagen. Para el caso particular de una línea, considerando que el sistema articular utilizado (tres grados de libertad), información de la segunda cámara es utilizada para conseguir un sistema de ecuaciones de rango completo. Con mayor número de líneas sería suficiente una cámara para controlar el sistema.

Los resultados de las pruebas realizadas indican que en ausencia de ruido los métodos NORM, THRH y ANALITICO prácticamente responden igual.

Para una línea, el método NORM responde mejor que el método THRH, dando valores menores de error medio. Más no así con dos o más líneas donde se observa que el método THRH es más robusto que el método NORM aunque a costa de reducir la velocidad de convergencia.

Las pruebas con ruido añadido, mostraron que el método NORM es muy sensitivo al ruido, el control fue posible solamente con valores bajos de ruido gaussiano. Para una línea, sólo hasta  $\sigma = 0.5$ . Para dos o tres líneas, sólo hasta  $\sigma = 0.2$ . Para valores superiores a estos, el control falla (campos vacíos de la Tabla 7.1).

Según la Tabla 7.1, para los métodos NORM y THRH el paso de establecimiento disminuye con dos líneas, pero con tres líneas se incrementa.

Teóricamente, si se considera controlar el alineamiento de dos líneas o más, bastaría una sola cámara, pues se contaría con un número suficiente de ecuaciones en (7.11) para obtener un sistema de rango completo. Es muy probable que esta solución sea menos estable que la encontrada a partir de dos cámaras. Con este mismo razonamiento, para una sola línea se necesitan definitivamente al menos dos cámaras.

La estimación del jacobiano a partir de características de líneas es un tema no abordado en anteriores trabajos de investigación. En el presente capítulo se ha llevado a cabo dicha estimación utilizando un sistema de dos cámaras, se considera por lo tanto un aporte adicional de la presente tesis.



# CAPITULO 8

## 8 APLICACIÓN A ROBOTS MÓVILES.

En este capítulo se muestra los aportes hechos en un sistema no holonómico de robots móviles guiado por visión. El objetivo de control en este sistema es que el robot móvil siga otro vehículo móvil (vehículo objetivo) que realiza movimientos desconocidos dentro del área de trabajo. El sistema de visión es el encargado de entregar las variables que definen la orientación y posición entre el vehículo objetivo y el robot móvil ( $\varphi, \theta, d$ ) que serán realimentadas al controlador (Figura 8.1).

Inicialmente el sistema de visión implementado en el Instituto Nacional de Automática de la Universidad Nacional de San Juan Argentina [18] estaba basado en relaciones geométricas de las proyecciones en perspectiva de un elemento de seguimiento. El aporte fue reemplazar dicho sistema de visión por otro basado en transformaciones proyectivas. Antes de su implementación se hizo una simulación de ambos métodos de detección visual que demostró el mejor desempeño del segundo de los métodos mencionados.

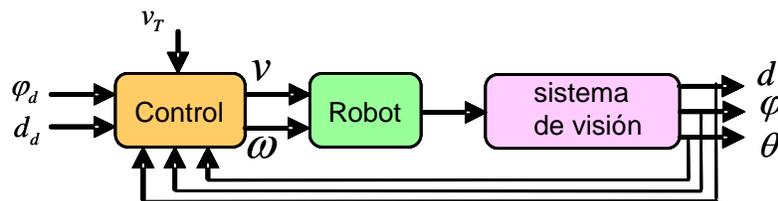


Figura 8.1.- Estructura de control del robot móvil.

## Capítulo 8.

Luego de implementarse en los respectivos robots y realizados los experimentos, se obtuvieron los resultados esperados, para tareas tanto de posicionamiento como de seguimiento.

A continuación se describen las fórmulas básicas para un robot móvil no holonómico, luego los dos sistemas visuales, la simulación realizada, y por último los resultados experimentales. La descripción del controlador servo visual, la ley de control, así como la demostración de su estabilidad, se pueden consultar en el Anexo E.

### 8.1 MODELO DEL ROBOT MOVIL.

El robot utilizado es del tipo unicycle, cuyas ecuaciones cinemáticas son:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \varphi \\ \dot{y} &= v \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= \omega\end{aligned}\quad (8.1)$$

donde  $(x, y)$  son coordenadas cartesianas de la posición del robot,  $\varphi$  es el ángulo de orientación,  $v$  y  $\omega$  son las velocidades lineal y angular del robot. La restricción no holonómica para este modelo es:

$$\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi = 0 \quad (8.2)$$

El cual especifica la trayectoria tangencial a lo largo de cualquier trayectoria del robot. Se asume que el punto de referencia del robot está en el punto central del eje que une las ruedas motoras del robot. La velocidad lineal y angular del robot son:

El cual especifica la trayectoria tangencial a lo largo de cualquier trayectoria del robot. Se asume que el punto de referencia del robot está en el punto central del eje que une las ruedas motoras del robot. La velocidad lineal y angular del robot son:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{v_1 - v_2}{L}$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son las velocidades lineales de la rueda izquierda y derecha respectivamente, y  $L$  es la distancia entre las dos ruedas motoras (Figura 8.2).

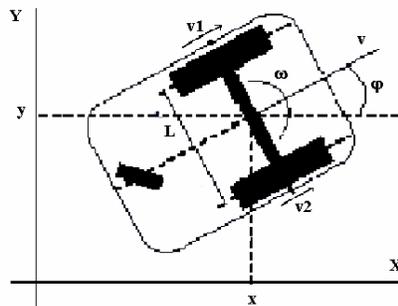


Figura 8.2.- Descripción geométrica del robot móvil.

## 8.2 MEDIDAS VISUALES DE LA POSICIÓN Y ORIENTACIÓN DEL OBJETO DE CONTROL.

El robot está equipado con una cámara fija montada en el centro del robot que captura la imagen de un patrón montado en la parte posterior de un vehículo objetivo y perpendicular al suelo. Este patrón está constituido por cuatro marcas de forma cuadrada cuyas medidas y distancias entre ellas son conocidas ( Figura 8.3). Para facilitar los cálculos, se asume que el centro óptico de la cámara y el punto central del patrón están a la misma altura.

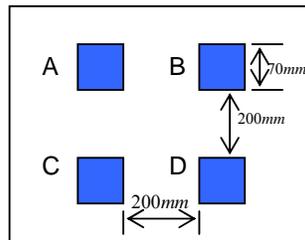


Figura 8.3.- Dimensiones del patrón.

Para realizar la tarea de control, las variables a ser medidas por el sistema de visión son  $(\varphi, \theta, d)$  que dan la posición y orientación del vehículo objetivo con respecto al robot móvil (Figura 8.4).

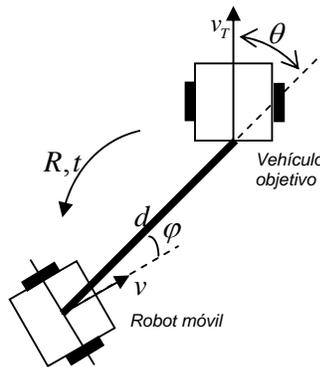


Figura 8.4.- Posición relativa entre el robot móvil y el vehículo objetivo.

## 8.3 DETECCIÓN VISUAL

La detección visual se ha realizado mediante dos métodos, el primero de ellos utiliza las propiedades de la proyección en perspectiva de puntos 3D en la imagen en conjunto con relaciones geométricas. Este método asume que tanto el plano de la imagen y el plano del patrón son perpendiculares al plano horizontal donde se desarrolla el movimiento de los

robots, en adelante, el centro óptico de la cámara y el punto central del patrón están a la misma altura con respecto al piso.

El segundo de ellos utiliza las propiedades de las transformaciones proyectivas 2D a 2D entre el plano del patrón y el plano de la imagen, esta transformación es llamada comúnmente como una homografía. A diferencia del método geométrico, la posición relativa entre planos es general, y por lo tanto no tiene restricciones en la posición del plano de la imagen y el plano del patrón con respecto al piso.

### 8.3.1 MEDIANTE LA PROYECCIÓN EN PERSPECTIVA Y RELACIONES GEOMÉTRICAS.

Para una posición general del patrón como en la (Figura 8.4), se tiene un esquema como el de la Figura 8.5 del plano horizontal XZ del sistema de coordenadas de la cámara. Además se tiene un esquema de la imagen del patrón como el la Figura 8.6 donde se asume que las distancias entre los centros de los cuadrados son valores conocidos E.

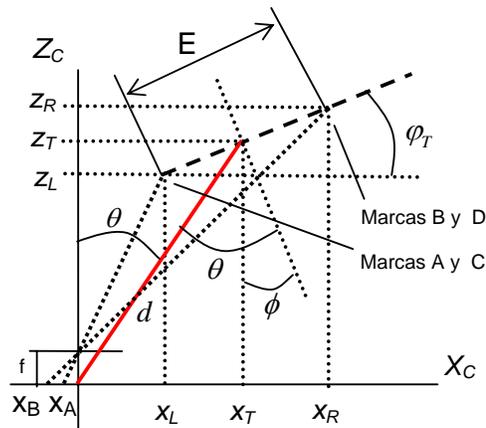


Figura 8.5.- Localización del objetivo respecto a la cámara.

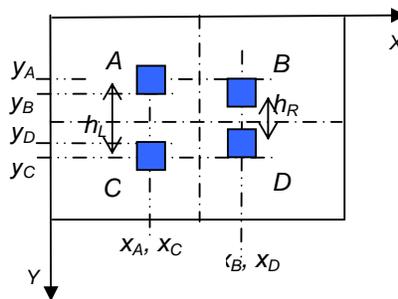


Figura 8.6.- Imagen del patrón de marcas en una posición general.

Como características de la imagen se miden los centros de gravedad en coordenadas normalizadas  $(x_i, y_i)$ ,  $i = A, B, C, D$  de cada uno de los cuadrados del patrón. A partir de estas características medidas por el sistema de visión se encuentra la posición y orientación del vehículo objetivo  $(x_T, z_T, \varphi_T)$  medidas en el sistema de coordenadas de la cámara  $(X_T, Z_T)$ . A partir de la Figura 8.5 se tiene:

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{x_R + x_L}{2} \\ z_T &= \frac{z_R + z_L}{2} \\ \varphi_T &= \cos^{-1}\left(\frac{x_R - x_L}{E}\right) \end{aligned} \quad (8.4)$$

donde  $x_L, x_R, z_L, z_R$  son proporcionados por el sistema de visión, utilizando el modelo pin hole sus expresiones son:

$$\begin{aligned} z_L &= f \frac{E}{h_L}, & z_R &= f \frac{E}{h_R} \\ x_L &= \frac{z_L}{f} x_A, & x_R &= \frac{z_R}{f} x_B \end{aligned} \quad (8.5)$$

donde  $h_L$  es la distancia medida en la imagen de los centros de los cuadrados A y C, del mismo modo  $h_R$  entre B y D (Figura 8.6).

A partir de la Figura 8.5 se encuentran las expresiones para la posición y orientación del vehículo objetivo:

$$\begin{aligned} \phi &= \tan^{-1}\left(\frac{z_R - z_L}{x_R - x_L}\right) \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{x_T}{z_T}\right) \\ \theta &= \varphi + \phi \\ d &= \sqrt{x_T^2 + z_T^2} \end{aligned} \quad (8.6)$$

En este método se asume que la traslación en el eje  $Y$ , y el giro en los ejes  $X$  y  $Z$  son nulos. Esto no es tan sencillo de conseguir por construcción. Hay que tener en cuenta que están referenciados al centro óptico de la cámara, y es un punto no accesible. Los datos son variaciones relativas entre la cámara y el robot que se mueve. Asegurar que el patrón de seguimiento esté por ejemplo perpendicular al suelo, se podría conseguir a través de una calibración rigurosa entre el patrón y la cámara. En adelante a este método se denominará como geométrico.

### 8.3.2 MEDIANTE TRANSFORMACIONES PROYECTIVAS.

En este método se encuentra inicialmente las transformaciones homográficas entre el plano del patrón y el de la imagen y a partir de ésta, se recuperan la rotación  $\mathbf{R}$  y traslación  $\mathbf{t}$ , como a continuación se describe.

El número mínimo de puntos correspondidos necesarios para calcular la homografía entre dos planos es cuatro [69], aunque es necesario estimar con mayor número puntos a fin de disminuir el efecto del ruido e inexactitudes en la detección de las características tanto de la imagen como del patrón. 12 puntos correspondidos son suficientes para conseguir una estimación aceptable de una homografía [196], en este método la estimación se lleva a cabo en base a 16 puntos correspondidos pertenecientes a las esquinas de los cuatro cuadrados del patrón. El sistema de coordenadas del patrón se asume estar en el centro del patrón.

La homografía está relacionada con la rotación  $\mathbf{R}$ , la traslación  $\mathbf{t}$ , y la normal  $\mathbf{n}_1$  al plano del patrón por (ver apartado 3.2.7):

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} + \frac{\mathbf{t}}{d_1} \mathbf{n}_1^T \quad (8.7)$$

Donde  $d_1$  es la distancia al plano del patrón. A través de una de una descomposición pueden ser encontrados  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{t}/d_1$ ,  $\mathbf{n}_1$  a partir de la homografía  $\mathbf{H}$ , donde  $\mathbf{t}/d_1$  corresponde a una traslación escalada [52] [196]. La traslación verdadera  $\mathbf{t}$  puede encontrarse fácilmente al conocerse de antemano las dimensiones en los puntos del patrón (modelo CAD).

Los parámetros que nos dan la posición y orientación del vehículo objetivo con respecto al sistema de la cámara se encuentran con las siguientes relaciones geométricas:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{t_x^2 + t_z^2} \\ \varphi &= \tan^{-1} \left( \frac{t_x}{t_z} \right) \\ \theta &= \varphi - \phi_Y \end{aligned} \quad (8.8)$$

Donde  $\phi_Y$  es el ángulo pitch (giro alrededor del eje Y) de los ángulos de Euler de  $\mathbf{R}$ . Este método será denominado por homografía.

## 8.4 SIMULACIÓN DE LA DETECCIÓN VISUAL.

Se ha realizado una simulación comparativa entre el método geométrico y el método por homografía, a fin de evaluar sus bondades de cada uno frente a perturbaciones propias del sistema.

En la simulación se dispone de dos robots móviles, uno con cámara que no se mueve y otro con un elemento de seguimiento (patrón de seguimiento) que se mueve. El patrón de seguimiento se compone de cuatro cuadrados, cada uno de ellos compuesto a su vez por cuatro esquinas y su centro. En cada posición del robot que se mueve, se proyectan las características visuales, y se calculan las variables a controlar  $(\varphi, \theta, d)$  por ambos métodos. Con dichas variables no se realiza ningún tipo de acción de control. Se suponen las siguientes condiciones en la simulación:

- Modelo de proyección pinhole, sin distorsión.
- Ejes coincidentes con los descritos en el apartado 8.3.
- Sensor de tamaño infinito (no se considera las posibles pérdidas de visibilidad por abandonar la zona sensible).
- No se producen oclusiones (no se considera las posibles pérdidas de visibilidad por ser objetos opacos)
- Parámetros intrínsecos conocidos:  $K_x, K_y, f, C_x, C_y$
- Tres parámetros extrínsecos constantes, aunque no necesariamente conocidos: Translación en el eje  $Y (t_y)$ , Giro en los ejes  $X (a_x)$  y  $Z (a_z)$ .
- Con el movimiento del robot que se mueve, varían los parámetros extrínsecos: translación en los ejes  $X$  y  $Z$ , giro en el eje  $Y$ .
- Los resultados de la simulación son los errores en las variables a controlar:  $(\varphi, \theta, d)$ . La distancia  $d$  se considera proyectada en el plano  $XZ$  (no se tiene en cuenta el posible valor de  $t_y$ , pues en ningún método se calcula).
- Los puntos de la imagen (expresados en píxeles) se pueden corromper con ruido Gaussiano de  $\sigma$  establecida.

Se ha desarrollado un programa en C (parte en C++) que calcula los resultados por ambos métodos. Utiliza las librerías OpenCv para el cálculo de la homografía.

El programa permite en consola realizar distintas pruebas, donde se introduce externamente la translación en el eje  $Y (t_y)$ , los giros en los ejes  $X (a_x)$  y  $Z (a_z)$  que en adelante les llamaremos los parámetros extrínsecos, y la  $\sigma$  del ruido. Los resultados se grafican en MatLab.

### 8.4.1 PRUEBAS REALIZADAS.

En la simulación se contempla dos robots, uno móvil que llevará montado el patrón en su parte posterior y otro fijo que poseerá la cámara y que estará observando en todo momento la evolución del primero.

## Capítulo 8.

En la prueba el robot que se mueve parte de una distancia de 1000 mm del otro, con orientación nula (relativa a la cámara) del patrón de seguimiento. Su evolución se aprecia en (Figura 8.7) Durante la evolución se calculan para cada método los errores de las variables a controlar ( $\varphi, \theta, d$ ) con respecto a los encontrados en condiciones ideales. Todos los ángulos se expresan en grados, y las distancias en milímetros.

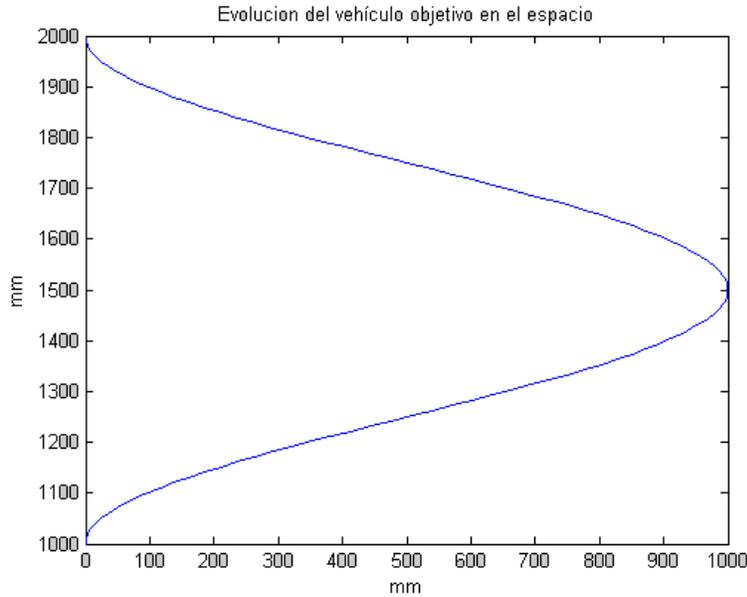


Figura 8.7.- Evolución espacial del vehículo objetivo.

Inicialmente se ha analizado la influencia de la variación de los parámetros extrínsecos (que son constantes y desconocidos). En la segunda parte de las pruebas se evalúa la influencia del ruido en la detección de las características.

### 8.4.1.1 CONDICIONES IDEALES.

Estas condiciones se obtienen si todos los parámetros extrínsecos son nulos, y no hay ruido. En la Figura 8.8 se muestran los resultados obtenidos con el método geométrico y en la Figura 8.9 los resultados obtenidos con el método por homografía. Se aprecia que para el método geométrico los errores son nulos, mientras que en el de homografía son casi nulos los errores en  $\varphi$  y  $\theta$ , mientras para  $d$  oscila entre 1mm debido a la naturaleza propia del método. Estos resultados se resumen numéricamente en la Tabla 8.1.

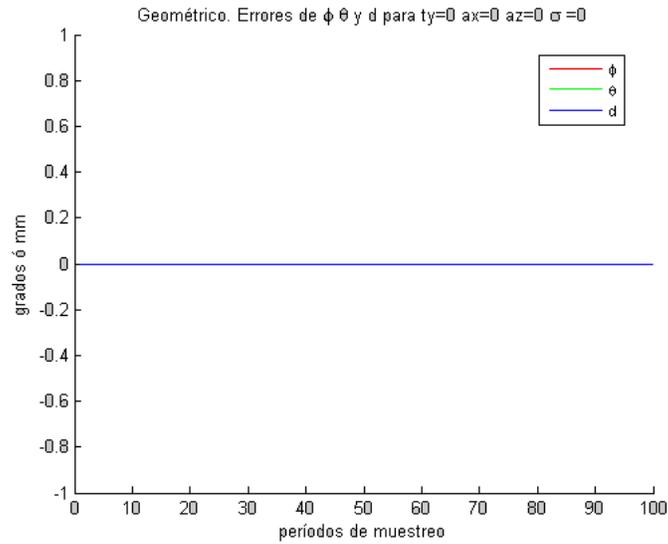


Figura 8.8.- Errores método geométrico con  $t_y=0$  ;  $a_x=0$  ;  $a_z=0$  ;  $\sigma=0$ .

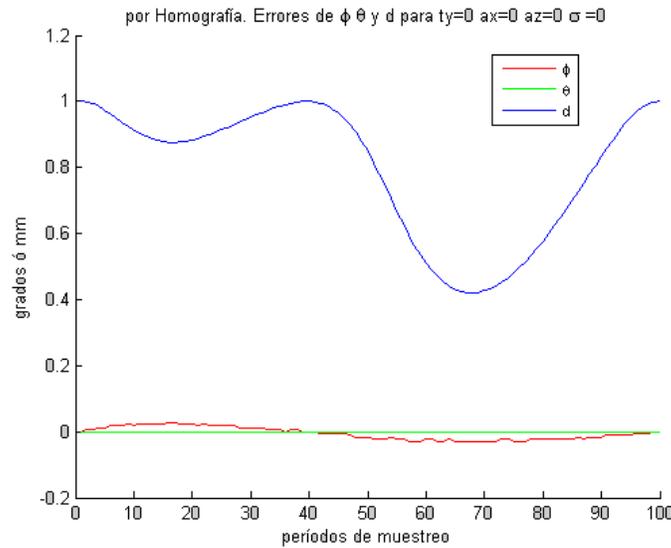


Figura 8.9.- Errores método por homografía con  $t_y=0$  ;  $a_x=0$  ;  $a_z=0$  ;  $\sigma=0$

Tabla 8.1.- Resultados con:  $t_y=0$  ;  $a_x=0$  ;  $a_z=0$  ;  $\sigma=0$

var.	MÉTODO			
	Geométrico		por Homografía	
	Error medio	Error max.	Error medio	Error max.
$\varphi$	0	0	0.028648	0.017246
$\theta$	0	0	0.028648	0.017647
$d$	0	0	1.0002	0.7944

### 8.4.1.2 VARIACIÓN DE LOS PARÁMETROS EXTRÍNSECOS.

La tabla 8.2 muestra los resultados para la prueba con  $t_y = 30$ , hay que destacar que se observa que al método geométrico no le afecta variaciones en  $t_y$ .

Tabla 8.2.- Resultados con:  $t_y = 30$  ;  $a_x = 0$  ;  $a_z = 0$  ;  $\sigma = 0$

var.	MÉTODO			
	Geométrico		por Homografía	
	Error medio	Error max.	Error medio	Error max.
$\varphi$	0	0	0.028648	0.017189
$\theta$	0	0	0.12605	0.019309
$d$	0	0	1.0001	0.79425

El las Figura 8.10 y Figura 8.11 se describen los resultados obtenidos cuando el ángulo  $a_x$  vale 5 grados y el resto cero, se aprecia un mejor comportamiento del método por homografía. En la Tabla 8.3 se recogen los resultados numéricos. De igual modo se observa el mismo comportamiento en las tablas Tabla 8.4 y Tabla 8.5 .

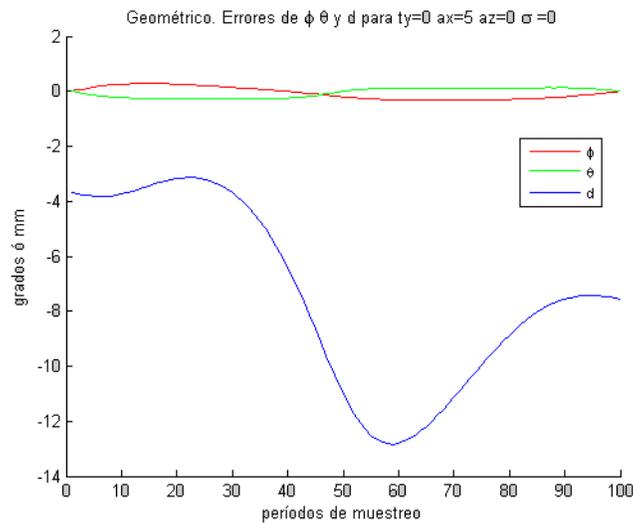


Figura 8.10.- Errores método geométrico con  $t_y = 0$  ;  $a_x = 5$  ;  $a_z = 0$  ;  $\sigma = 0$

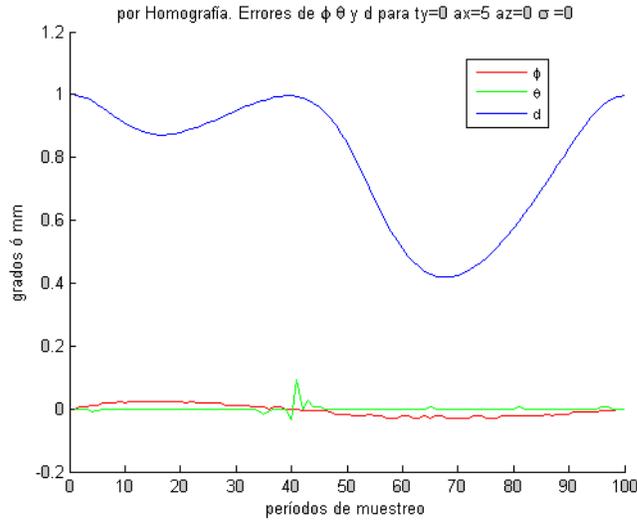


Figura 8.11.- Errores método por homografía con  $t_y=0$  ;  $a_x=5$  ;  $a_z=0$  ;  $\sigma=0$

Tabla 8.3.- Resultados con:  $t_y=0$  ;  $a_x=5$  ;  $a_z=0$  ;  $\sigma=0$

var.	MÉTODO			
	Geométrico		por Homografía	
	Error medio	Error max.	Error medio	Error max.
$\varphi$	0.33805	0.20592	0.028648	0.017017
$\theta$	0.26929	0.13579	0.085944	0.018564
$d$	12.8334	7.4149	0.9963	0.79128

Tabla 8.4.- Resultados con:  $t_y=0$  ;  $a_x=0$  ;  $a_z=5$  ;  $\sigma=0$

var.	MÉTODO			
	Geométrico		por Homografía	
	Error medio	Error max.	Error medio	Error max.
$\varphi$	0.67609	0.40703	0.028648	0.017074
$\theta$	0.67609	0.40772	0.074485	0.018793
$d$	13.4636	9.7211	1	0.79423

Tabla 8.5.- Resultados con:  $t_y=5$  ;  $a_x=5$  ;  $a_z=5$  ;  $\sigma=0$

var.	MÉTODO			
	Geométrico		por Homografía	
	Error medio	Error max.	Error medio	Error max.
$\varphi$	0.68755	0.4818	0.028648	0.017074
$\theta$	1.123	0.83004	0.063025	0.018678
$d$	35.9466	20.5815	0.9987	0.79346

### 8.4.1.3 INTRODUCCIÓN DE RUIDO.

También se realizaron pruebas con ruido gaussiano añadido, para un valor de  $\sigma = 1$  y las demás variaciones cero, se consiguieron las gráficas de la Figura 8.12 y Figura 8.13. Se aprecia un mejor comportamiento del método por homografía. Se destaca igualmente que el ángulo  $\theta$  es el más afectado por el ruido. En la Tabla 8.6 se recogen los resultados numéricos.

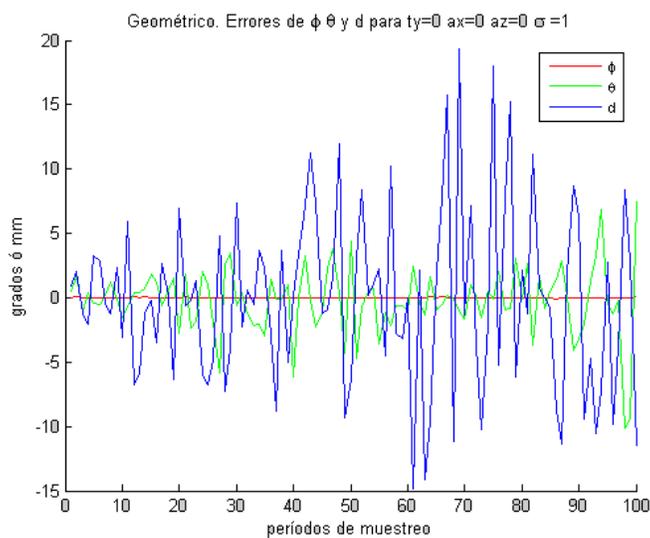


Figura 8.12.- Errores método geométrico con  $t_y=0$  ;  $a_x=0$  ;  $a_z=0$  ;  $\sigma=1$

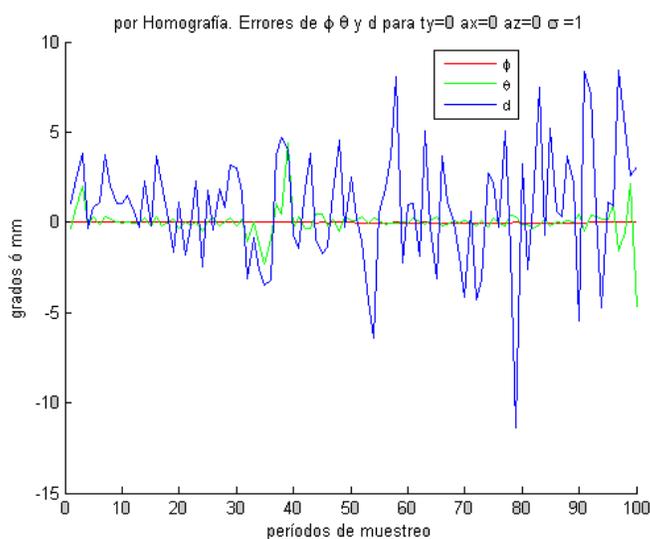


Figura 8.13.- Errores método por homografía con  $t_y=0$  ;  $a_x=0$  ;  $a_z=0$  ;  $\sigma=1$

Tabla 8.6.- Resultados con:  $t_y=0$  ;  $a_x=0$  ;  $a_z=0$  ;  $\sigma=1$

var.	MÉTODO			
	Geométrico		por Homografía	
	Error medio	Error max.	Error medio	Error max.
$\varphi$	0.063025	0.021314	0.051566	0.019481
$\theta$	5.8556	1.4878	8.1188	0.42026
$d$	26.5637	4.8983	9.038	2.5357

En la Tabla 8.7 se recogen los resultados para el caso cuando todos los ejes tienen variaciones y además la detección se asume con ruido de  $\sigma=1$ . Se observa altos valores de errores principalmente para el desplazamiento  $d$  en el método geométrico, el método por homografía sigue dando menores valores para los errores.

Tabla 8.7.- Resultados con:  $t_y=30$  ;  $a_x=5$  ;  $a_z=5$  ;  $\sigma=1$

var.	MÉTODO			
	Geométrico		por Homografía	
	Error medio	Error max.	Error medio	Error max.
$\varphi$	0.71047	0.47939	0.051566	0.017074
$\theta$	7.013	1.8575	3.1627	0.35982
$d$	50.6167	21.118	12.0509	2.7978

Pruebas con altos valores de ruido en conjunto con variaciones en los otros ejes se muestran por ejemplo en la Figura 8.14 y Figura 8.15, la Tabla 8.8 recoge sus valores numéricos.

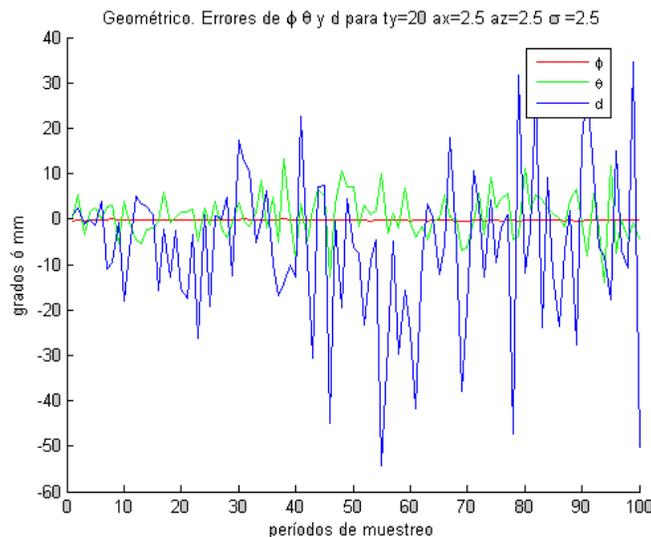


Figura 8.14.- Errores método geométrico con  $t_y=20$  ;  $a_x=2.5$  ;  $a_z=2.5$  ;  $\sigma=2.5$

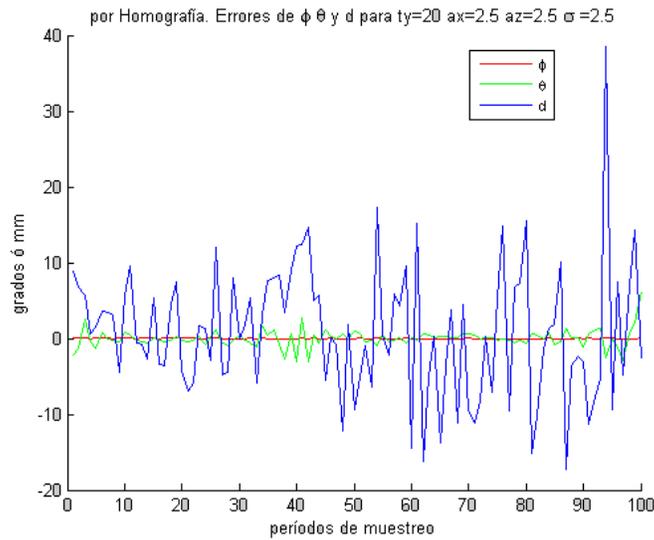


Figura 8.15.- Errores método por homografía con  $t_y=20$  ;  $a_x=2.5$  ;  $a_z=2.5$  ;  $\sigma=2.5$

Tabla 8.8.- Resultados con:  $t_y=20$  ;  $a_x=2.5$  ;  $a_z=2.5$  ;  $\sigma=2.5$

var.	MÉTODO			
	Geométrico		por Homografía	
	Error medio	Error max.	Error medio	Error max.
$\varphi$	0.71047	0.47939	0.051566	0.017074
$\theta$	7.013	1.8575	3.1627	0.35982
$d$	50.6167	21.118	12.0509	2.7978

#### 8.4.2 PRECISIÓN DE LOS RESULTADOS.

La determinación de características visuales con alta precisión y la estimación de su incertidumbre es un tema preferente de investigación. No es en absoluto un tema sencillo. De cualquier forma es fundamental que las condiciones de captación sean las mejores posibles dentro las restricciones impuestas a la escena (entornos estructurados, no estructurados o semi-estructurados). En el caso estudiado, la captación viene marcada por:

- Se parte de que no se puede influir en la iluminación es decir, queremos que el robot funcione en cualquier ambiente.
- Se emplea una cámara no progresiva con objetos móviles (tanto la cámara como el patrón estarán sometidos a vibraciones, propias del movimiento de los robots). Sin embargo no existe cámaras en color motorizadas con escaneado progresivo. La cámara es de color con video compuesto tampoco es la mejor calidad, pero el mercado no proporciona mejores opciones.

*Aplicación a Robots Móviles.*

- Si que parece adecuado usar una cámara en color pues simplifica el reconocimiento de la escena y del elemento de seguimiento.
- El elemento o patrón de seguimiento puede ser elegido para facilitar al máximo el procesado de las imágenes, pues es un elemento introducido artificialmente.

La calidad del elemento de seguimiento es importante para el éxito de la detección visual en las condiciones de seguimiento expuestas. Un ejemplo de un patrón de pésima calidad se muestra en la Figura 8.16 y su imagen segmentada en la Figura 8.17.



Figura 8.16.-Elemento de seguimiento.

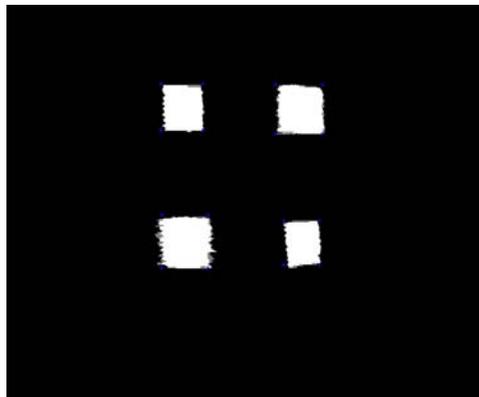


Figura 8.17.- Imagen procesada del elemento de seguimiento.

Se observa la diferencia de procesamiento por filas o por cuadros. En las filas hay una alta variación que podría ser un efecto producido por el movimiento, pero es más probable que se deba a problemas de sincronismo en la adquisición y filtrados de realce que realiza directamente la tarjeta de adquisición que tal vez se pueda suprimir.

## 8.5 EXPERIMENTOS DE CONTROL REALIZADOS.

Los experimentos propiamente dichos se llevaron a cabo utilizando la detección visual basada en homografías. Se utilizaron dos robots móviles Pioneer, cada uno de ellos tiene su propio sistema de control a bordo. El sistema de visión incluye una tarjeta de adquisición que permite capturar imágenes de una cámara Canon VC-C50i montada en el robot seguidor.



Figura 8.18.- Robot utilizado en el experimento.

En los experimentos fueron usados los siguientes parámetros de seguimiento:  $k_e = 150$ ,  $\lambda_e = 0.005$ ,  $k_\varphi = 10$  y  $\lambda_\varphi = 0.1$ . El robot móvil tiene como objetivo de mantenerse a una distancia constante  $d_d = 500\text{mm}$  del vehículo objetivo, y con un ángulo  $\varphi_d = 0$ . La Figura 8.19 muestra la evolución de la distancia entre ambos robots mientras que la Figura 8.20 muestra la evolución de los ángulos  $\varphi$  y  $\theta$ . A partir de estas figuras puede comprobarse que la tarea de control se realiza satisfactoriamente.

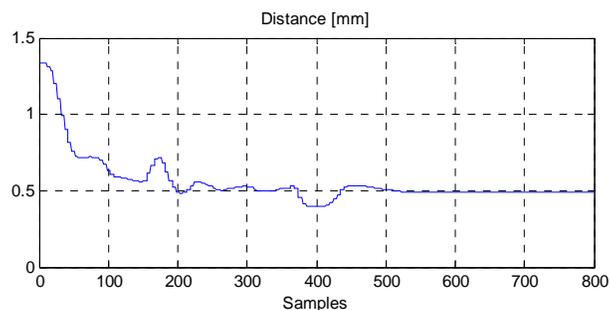
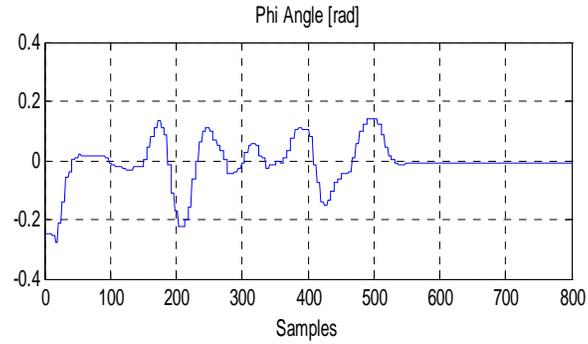
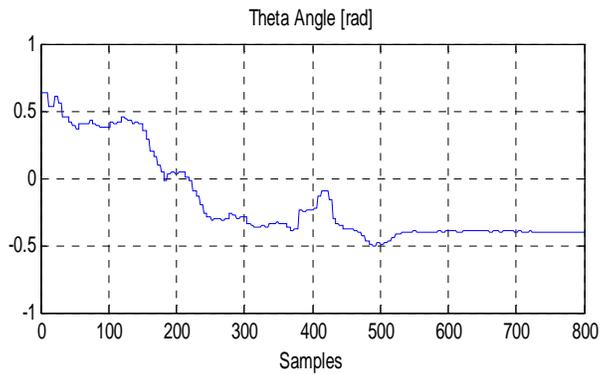


Figura 8.19.- Evolución de la distancia al vehículo objetivo.



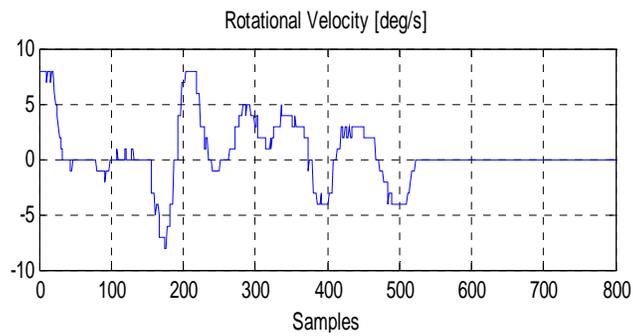
a) evolución del ángulo  $\varphi$ .



b) evolución del ángulo  $\theta$ .

Figura 8.20.- Evolución de los ángulos  $\varphi$  y  $\theta$ .

En la siguiente figura se grafican las acciones de control (velocidad de rotación y velocidad lineal) que son enviadas al robot móvil.



a) velocidad de rotación

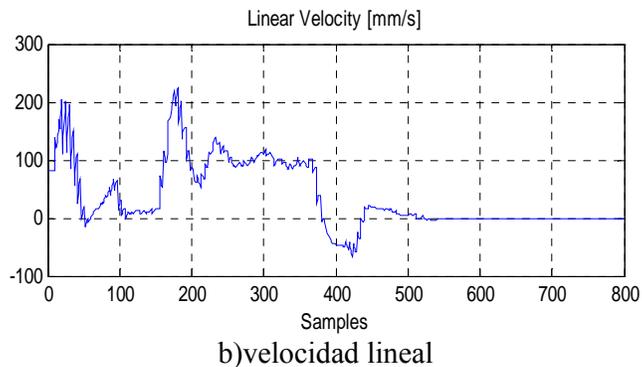
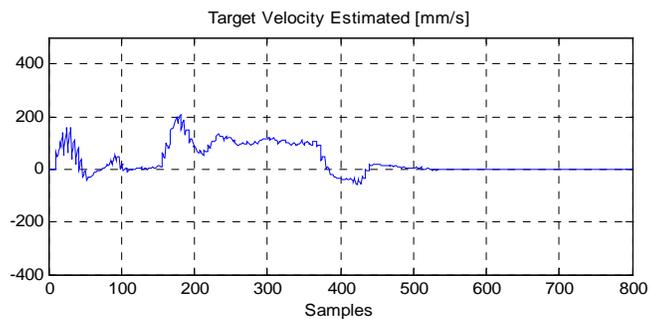
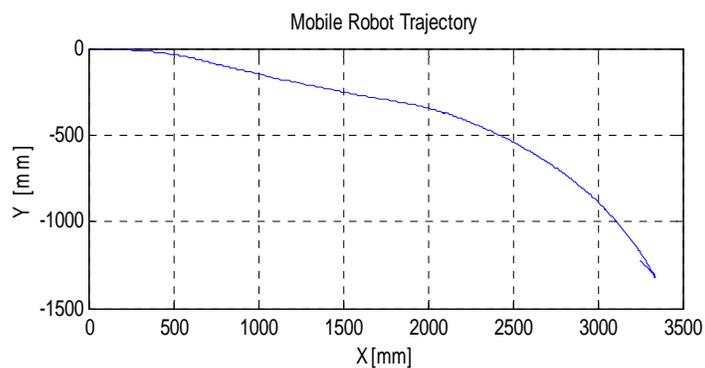


Figura 8.21.- Acciones de control.

La velocidad estimada del vehículo objetivo se grafica en la siguiente figura:



Asi como la trayectoria realizada por el robot móvil se muestra a continuación:



## **8.6 CONCLUSIONES.**

### **8.6.1 DE LA SIMULACIÓN.**

En condiciones ideales el método geométrico puede dar mejores resultados que el método de homografía.

El método por homografía se comporta mejor cuanto más distintos de cero sean los parámetros extrínsecos considerados como constantes. Además suministra unos valores que pueden ser aprovechados.

El método de homografía se comporta mejor que el de geometría a igual de ruido. Este aspecto no puede ser considerado de forma absoluta, pues el centro de gravedad de un cuadrado puede ser más robusto que la determinación de esquinas.

El ángulo  $\varphi$  se ve menos afectado que el ángulo  $\theta$  por el ruido y demás desviaciones.

El método por homografía es más riguroso que el geométrico. Realiza menos simplificaciones (parámetros extrínsecos que no tienen que ser nulos).

La homografía se calcula con 16 puntos, y por lo tanto es más robusto ante el ruido Gaussiano.

### **8.6.2 DE LA EJECUCIÓN DE LA TAREA DE CONTROL.**

Experimentos en tareas de seguimiento fueron realizados y mostraron la validez del controlador no lineal utilizado, que contempla ganancias variables que evitan saturaciones de las acciones de control, así también se comprueba que el sistema de control es asintóticamente estable.

El método basado en homografía fue implementado en el sistema visual del robot, permitió al sistema contar en cada ciclo de control la posición y orientación relativa con el vehículo objetivo.

Aunque experimentalmente no se han comparado los dos métodos de detección visual expuestos, los resultados de la simulación son suficientes para aseverar las mejores prestaciones del método basado en homografía con respecto al geométrico.



# CAPITULO 9

## 9 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.

### 9.1 CONCLUSIONES Y APORTACIONES.

En la presente tesis doctoral se ha abordado el control visual basado en características de un sistema articular de tres grados de libertad mediante la estimación en línea del jacobiano de la imagen, utilizando un par de cámaras fijas débilmente calibradas. En la estimación del jacobiano se ha incorporado la geometría epipolar de las cámaras, así como la definición de un factor de fiabilidad de los movimientos ya realizados previamente.

Las publicaciones existentes en la literatura no han abordado este tema, como se ha visto en el estado del arte del capítulo 2, justificando por lo tanto la validez del presente estudio. La publicación más cercana, es la presentada por [103], donde se aplica la información de la geometría epipolar solamente en la ley de control, y además realizándose tareas estáticas exclusivamente. El desarrollo realizado en la presente tesis, al considerar la geometría epipolar en un nivel más inferior, es decir en la estimación del jacobiano de la imagen, es válido tanto para tareas estáticas como para dinámicas (capítulo 5), considerándose esto como uno de los principales aporte del presente trabajo. Los resultados obtenidos avalan claramente dicha aportación.

La información suministrada por la geometría epipolar se condensa en la llamada matriz fundamental, por lo que se ha considerado imprescindible abordar inicialmente el estudio del cálculo de dicha matriz, pues su exactitud redundará decisivamente en la mejora de la estimación del jacobiano de la imagen. Al tratarse de un cálculo realizado en la etapa de calibración, sobre un elemento previamente definido, se minimiza la influencia de las falsas correspondencias, propias del empleo de entornos no estructurados. Las características visuales se han detectado con precisión subpixel, a fin de conocer con la máxima precisión la mencionada matriz fundamental.

La comprobación de los resultados obtenidos en el control visual del sistema articular, ha exigido tanto el cálculo de la calibración euclídea de cada cámara mediante el método de Zhang [193], como la determinación de la transformación rígida entre las cámaras del sistema estereoscópico a partir de la matriz fundamental y la homografía entre un plano de la escena y cada cámara. De esta forma se ha podido cerrar un bucle de comprobación para los algoritmos propuestos, evaluándose los mismos tanto cualitativa como cuantitativamente.

Igualmente, la reconstrucción 3D ha jugado un papel importante en algunas aplicaciones realizadas en la presente tesis, como por ejemplo la determinación de la separación entre ejes de rotación entre eslabones, o la determinación de la profundidad Z de un punto y la determinación de la transformación cámara-robot utilizados en el cálculo analítico del jacobiano de la imagen. Apuntando a estos fines se ha experimentado con diversos métodos de reconstrucción 3D [68]. Métodos que van desde los métodos lineales como el de triangulación básica usando las matrices de proyección, el método del punto medio y el método de la mínima distancia entre rayos reproyectados, hasta los métodos no lineales como el de Levenberg-Marquardt. Eligiéndose como el más adecuado para las pruebas a realizar, el último de los métodos lineales mencionados. Esta información no se ha consignado en la tesis por no ser uno de los objetivos de la misma.

La estimación del jacobiano de la imagen se ha completado con la definición y cálculo de un factor de fiabilidad que depende de los movimientos realizados anteriormente, y de las características que se derivan de ellos. Este factor de fiabilidad, es la base para generar nuevos métodos de estimación del jacobiano de la imagen, y actúan como un factor de peso que recibe el movimiento realizado. En las referencias bibliográficas no se tiene constancia de la definición de un factor de peso basado en la fiabilidad definida que incremente las prestaciones del control visual, por lo que constituye un aporte de la presente tesis.

Se han propuesto cuatro métodos originales de estimación del jacobiano de la imagen con la técnica de los  $N$  últimos movimientos linealmente independientes. Estos métodos utilizan el factor de fiabilidad mencionado anteriormente. Estos nuevos métodos de estimar el jacobiano utilizando el concepto de fiabilidad constituyen un aporte a la comunidad, pues no se ha encontrado otro método no iterativo más que el método que se describe en [174].

Se ha integrado la matriz fundamental en la implementación de uno de los métodos anteriores. Para conseguir esto, se ha implementando un algoritmo de optimización no lineal basado en el método de Levenberg-Marquardt, que no depende del número de características ni del número de movimientos anteriores tomados en cuenta. Este nuevo método de estimar el jacobiano que integra información de la matriz fundamental también constituye un aporte a la comunidad, pues no se tiene referencia de otro en la bibliografía.

A fin de evaluar los nuevos métodos propuestos, se han estudiado e implementado los principales métodos de estimación del jacobiano de la imagen existentes en la literatura, tanto iterativos como no iterativos.

### *Conclusiones y Trabajos Futuros.*

Se ha calculado el modelo cinemático del robot utilizado, un sistema articular de tres grados de libertad, utilizando las ecuaciones de Denavit-Hartenberg en el cual se incorpora la separación de los ejes del segundo y tercer eslabón. Consiguiéndose por lo tanto la cinemática directa, y el jacobiano del robot. El modelo del robot no se conocía antes de empezar las pruebas y surgió de la necesidad de implementar el jacobiano analítico de la imagen. Este modelo puede ser utilizado en futuros trabajos con el sistema articular, como puede ser la implementación de nuevos métodos de transformación cámara-robot y de calibración cinemática.

Se ha implementado el jacobiano de la imagen obtenido a través de un cálculo analítico. En el cual se ha tomado en cuenta la calibración de la cámara, la respectiva transformación robot-cámara, y el jacobiano del robot. En las pruebas realizadas, se ha considerado un jacobiano común resultado de la fusión de los jacobianos analíticos de ambas cámaras, constituyéndose también esto en un aporte de la presente tesis, pues no se tiene referencia en la bibliografía de un trabajo similar.

Se han realizado pruebas tanto en tareas de posicionamiento como de seguimiento dentro de un espacio de trabajo definido, pruebas con ruido anadido o sin ruido añadido, siendo el ruido añadido de tipo gaussiano. En estas pruebas, los resultados obtenidos se han contrastado los métodos propuestos de estimación del jacobiano, con los métodos de estimación del jacobiano existentes en la bibliografía y el método basado en el jacobiano analítico.

Los resultados y la comparación realizada podrían dividirse en dos. Por una parte frente a los métodos de estimación del jacobiano, se demuestra que la incorporación de la geometría epipolar y el factor de fiabilidad en la estimación del jacobiano de la imagen, incrementa la robustez del sistema frente al ruido. Este resultado es uno de los principales aportes de la presente tesis, pues el incremento de la robustez al ruido basado en la estimación del jacobiano de la imagen no se había tratado en anteriores trabajos. Por otra parte, la incorporación de la geometría epipolar y la definición del índice de fiabilidad en la estimación del jacobiano de la imagen, obtiene tan buenos resultados como los obtenidos con el método basado en el jacobiano analítico el cual se ha conseguido luego de delicados trabajos de calibración y de la determinación del jacobiano del robot. Es necesario destacar la principal desventaja del método analítico al necesitarse un cuidadoso y laborioso trabajo previo.

A raíz de los experimentos realizados y considerando que el sistema utilizado es un sistema no calibrado, se puede afirmar que la estimación en línea del jacobiano de la imagen para un sistema no calibrado es un método flexible que permite encontrar el jacobiano de la imagen simplemente con información del cambio en características y articulaciones. Este aspecto lo hace especialmente robusto a cambios de los parámetros como la calibración de las cámaras, la calibración cinemática, u otro tipo de transformaciones. Considerando sistemas con entornos desconocidos o cambiantes, este tipo jacobiano de la imagen representa una buena alternativa, pues no necesita información de las diferentes transformaciones presentes en el sistema.

Otro aporte a destacar es el incremento de la robustez frente al ruido conseguido en un sistema no calibrado, pues de esta manera es aplicable a entornos ruidosos desconocidos o cambiantes. Constituyéndose en una línea de investigación futura.

Se ha implementado dos métodos de estimación del jacobiano de la imagen utilizando características de líneas en la imagen, realizándose a partir de éste jacobiano, control visual basado en las líneas. El primero de estos métodos toma en cuenta la posición 3D de la línea en el espacio de trabajo, mientras que en el segundo se estima el jacobiano de la imagen a partir de las características medidas directamente en la imagen. Este aspecto también constituye un aporte, pues no se ha reportado en la literatura la estimación del jacobiano a partir de líneas.

Se ha realizado una aplicación de las transformaciones proyectivas para la determinación de la posición relativa entre dos robots móviles. Se ha aplicado el método de descomposición para recuperar la rotación y traslación escalada entre ambos móviles. Los resultados obtenidos y comparados con otros métodos, indican un buen funcionamiento del método basado en transformaciones proyectivas.

Se ha comprobado la robustez del jacobiano analítico basado en líneas frente al jacobiano analítico basado en puntos. En las pruebas realizadas con perturbación de la transformación entre el sistema del robot y el sistema de la cámara, el jacobiano analítico basado en líneas controló el sistema hasta con una perturbación del 10%, mientras que el jacobiano analítico basado en puntos sólo con perturbación de hasta un 5%.

## 9.2 TRABAJOS FUTUROS.

A raíz de la experiencia ganada en el desarrollo de la presente tesis, los trabajos futuros están enmarcados en el campo de control visual incorporando la geometría epipolar.

Aunque a lo largo de las numerosas pruebas realizadas, tanto para el caso estático como para el caso dinámico, el método basado en la incorporación de la matriz fundamental nunca llevó al sistema a inestabilidades, sería deseable realizar un estudio de la estabilidad del control visual basado en la estimación del jacobiano. Se pretendería analizar las imágenes de estabilidad en función del error cometido en la estimación del jacobiano.

El incremento del número de cámaras es otro aspecto a analizar en un futuro, en el que se incorporaría el tensor trifocal [69].

Otra línea de investigación que puede abrirse es la aplicación a sistemas con fusión sensorial, donde la información de la geometría epipolar sea incluida en un sistema global que realiza una tarea específica.

El incremento de la robustez de los métodos de estimación del jacobiano de la imagen utilizando características de líneas en la imagen, para realizar control visual, es otra línea de investigación futura. En este apartado también debe considerarse el estudio de nuevos métodos de estimar el jacobiano de la imagen a partir de las características de las líneas.

*Conclusiones y Trabajos Futuros.*

Otra línea de investigación abierta es el estudio de nuevos métodos de transformaciones cámara-robot y de calibración cinemática, utilizando el sistema articular de tres grados de libertad.

Otra línea que se ha abierto como trabajo futuro es la implementación de un método de discriminación entre las dos soluciones que se obtienen del proceso de descomposición a partir de una transformación homográfica. En nuestra implementación, se ha aplicado un factor de dispersión donde interviene el conocimiento de la rotación y la traslación entre sistemas de ambas cámaras y la posición 3D del punto considerado. No se describe en la presente tesis por la falta de más pruebas que lo validen.



# ANEXO A

## CONSIDERACIONES SOBRE EL CUERPO RÍGIDO

El espacio de la tarea del robot es el conjunto de posiciones y orientaciones que el robot puede alcanzar.

Un cuerpo rígido está completamente determinado por su posición y orientación con respecto a un sistema de referencia. Si se considera al efector final del robot como un cuerpo rígido moviéndose en un espacio tridimensional, estará representado por el vector  $\mathbf{r} \in SE^3$ :

$$\mathbf{r} = [t_x \quad t_y \quad t_z \quad \phi \quad \psi \quad \gamma] \quad (\text{A.1})$$

donde  $t_x, t_y, t_z$  son la traslación, y  $\phi, \psi, \gamma$  la rotación en los ejes  $X, Y, Z$  respectivamente y  $SE^3 = \mathcal{R}^3 \times SO^3$  es el grupo Euclídeo Especial que contiene seis grados de libertad, tres de traslación y tres de rotación, aunque en algunas aplicaciones el espacio de la tarea puede restringirse a un subespacio como por ejemplo  $\mathcal{R}^3$ , como en tareas de recoger y colocar (pick and place), donde sólo se consideran traslaciones; o en tareas de seguimiento de un objeto móvil de tal manera que simplemente se le mantiene en la línea de vista, para esta tarea sólo es necesario considerar rotaciones, es decir el espacio  $SO^3$ .

El movimiento de un cuerpo rígido está representado por la velocidad de traslación  $\mathbf{T} = [V_x \quad V_y \quad V_z]^T$  y la velocidad de rotación  $\mathbf{\Omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ , juntos definen el vector de velocidades espaciales  $\dot{\mathbf{r}}$  (velocity screw):

$$\dot{\mathbf{r}} = [V_x \quad V_y \quad V_z \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T = [\mathbf{T}^T \quad \mathbf{\Omega}^T]^T \quad (\text{A.2})$$

Anexo A.

Sea  $\mathbf{M}$  un punto rígidamente unido al efector final del robot con coordenadas  $\mathbf{M} = [X \ Y \ Z]^T$  respecto a un sistema de coordenadas base, la derivada temporal de este punto  $\mathbf{M}$  está dado por

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{T} + [\boldsymbol{\Omega}]_x \mathbf{M} \quad \text{ó} \quad \dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{I}_3 \quad -[\mathbf{M}]_x] \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{A.3})$$

donde  $\mathbf{I}_3$  es la matriz identidad de orden tres, y se ha aplicado la propiedad de

$$[\boldsymbol{\Omega}]_x \mathbf{M} = -[\mathbf{M}]_x \boldsymbol{\Omega} \quad (\text{A.4})$$

Si se tiene un vector de velocidades espaciales  ${}^e \dot{\mathbf{r}}$  con respecto a un sistema de coordenadas, por ejemplo con respecto al efector final del robot. La relación entre este vector de velocidades  ${}^e \dot{\mathbf{r}}$  y otro con respecto al sistema de coordenadas de la cámara  ${}^c \dot{\mathbf{r}}$  está dado por

$${}^c \dot{\mathbf{r}} = {}^c \mathbf{W}_e {}^e \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{A.5})$$

donde  ${}^c \mathbf{W}_e$  es una matriz de transformación expresada como:

$${}^c \mathbf{W}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & [{}^c \mathbf{t}_e]_x \\ 0 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^c \mathbf{R}_e & 0 \\ 0 & {}^c \mathbf{R}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^c \mathbf{R}_e & [{}^c \mathbf{t}_e]_x {}^c \mathbf{R}_e \\ 0 & {}^c \mathbf{R}_e \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Tanto  ${}^c \mathbf{R}_e$  como  ${}^c \mathbf{t}_e$  pueden ser encontrados con cualquiera de los métodos de hallar las matrices de transformación entre sistemas de coordenadas del capítulo 6.

La matriz de rotación  $\mathbf{R} \in SO^3$  es una matriz cuadrada  $3 \times 3$  que describe la orientación mutua entre dos sistemas de coordenadas. Pertenece al grupo Ortogonal Especial  $SO^3$  de matrices, y cumple las siguientes propiedades:

- $\det(\mathbf{R}) = 1$  (sistema de mano derecha) (A.7)

- $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$  entonces  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}_3$  (A.8)

- Las columnas y filas de  $\mathbf{R}$  tienen longitud uno y son mutuamente ortogonales, es decir si  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  son las columnas o filas de  $\mathbf{R}$ , se cumple que: (A.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3^T \mathbf{r}_3 = 1 \\ \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_3 = 0 \\ [\mathbf{r}_1]_x \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde  $[\mathbf{r}_1]_x$  es la matriz skew symmetric de  $\mathbf{r}_1$ . La matriz skew symmetric de un vector

$\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$  está definida como:

$$[\mathbf{v}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Considerando las propiedades anteriores y de que  $\mathbf{R}$  realiza una rotación de vectores del sistema uno al sistema dos, las columnas de  $\mathbf{R}$  son los vectores unitarios del sistema uno medidos en el sistema dos, mientras que sus filas son los vectores unitarios del sistema dos medidos en el sistema uno.

Diferentes representaciones para la matriz de rotación son posibles como por ejemplo: ángulos de Euler [10] [166], cuaternios [28], representación exponencial [109], o la fórmula de Rodríguez [111] entre otros.

Normalmente una tarea robótica está especificada con respecto a uno o varios sistemas de referencia. Por ejemplo, la cámara puede dar información de la localización de un objeto con respecto al sistema de referencia de la cámara mientras que la configuración usada para agarrar el objeto puede estar especificada con respecto al sistema de coordenadas del efector final del robot. Se puede representar las coordenadas de un punto  $\mathbf{X}$  con respecto al sistema de coordenadas  $W$  como  $\mathbf{X}_W$ . Si se tienen dos sistemas de coordenadas  $A$  y  $B$ , la matriz de rotación y el vector de traslación que representan respectivamente la orientación y posición del sistema  $A$  con respecto al sistema  $B$  son representados por  $\mathbf{R}_{BA}$  y  $\mathbf{t}_{BA}$  respectivamente. Ambos, la orientación y la posición se determinan la pose (posición y orientación) del robot pueden ser representadas en forma más compacta por una matriz de transformación homogénea  $\mathbf{H}_{BA}$  de la forma:

$$\mathbf{H}_{BA} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{BA} & \mathbf{t}_{BA} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Si se tiene un punto  $\mathbf{X}_A$  con referencia al sistema de coordenadas  $A$ , este punto con referencia al sistema de coordenadas  $B$  estará dado por

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{H}_{BA} \mathbf{X}_A = \mathbf{R}_{BA} \mathbf{X}_A + \mathbf{t}_{BA} \quad (\text{A.13})$$

Frecuentemente se debe componer múltiples sistemas de coordenadas para obtener las coordenadas deseadas, por ejemplo si se desea componer la matriz de transformación  $\mathbf{H}_{DE}$  y  $\mathbf{H}_{CD}$  para obtener la orientación y posición del sistema de coordenadas de  $E$  con respecto a  $C$ , se tiene:

$$\mathbf{H}_{CE} = \mathbf{H}_{CD} \mathbf{H}_{DE} \quad (\text{A.14})$$

donde

$$\mathbf{H}_{CE} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{CE} & \mathbf{t}_{CE} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{CD} \mathbf{R}_{DE} & \mathbf{R}_{CD} \mathbf{t}_{DE} + \mathbf{t}_{CD} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Anexo A.

La inversa de una matriz homogénea es:

$$\text{Si } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ entonces } \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

## ANEXO B

### PROPIEDAD DE RESTRICCIÓN EPIPOLAR

Dado un punto  $\mathbf{m}$  (en coordenadas normalizadas), en la primera imagen, su correspondiente punto  $\mathbf{M}$  en el espacio debe estar en la línea que une el centro óptico  $\mathbf{C}$  y el punto  $\mathbf{M}_\infty$  en el infinito y que pasa por  $\mathbf{m}$ , que se denominará la línea  $\mathbf{CM}_\infty$  (Figura B.1).

Un punto  $\mathbf{M}_\infty$  en el infinito en coordenadas proyectivas es representado por  $\tilde{\mathbf{M}}_\infty = (X, Y, Z, 0)^T$ , si se proyecta este punto sobre la primera imagen se tiene:

$$\tilde{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{M}_\infty \quad (\text{B.1})$$

donde  $\tilde{\mathbf{m}}$  está en notación proyectiva, de donde  $\mathbf{M}_\infty = \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{m}}$ . Cualquier punto perteneciente a la línea  $\mathbf{CM}_\infty$  se expresará de la siguiente manera:

$$\mathbf{M} = \mathbf{C} + \lambda \mathbf{M}_\infty = \mathbf{C} + \lambda \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{m}}, \text{ donde } \lambda \in (0, \infty) \quad (\text{B.2})$$

que es la representación paramétrica de la línea  $\mathbf{CM}_\infty$ . Asumimos que el sistema de coordenadas del mundo coincide con el sistema de coordenadas de la primera cámara por lo que  $\mathbf{C} = (0, 0, 0)^T$  y  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , si  $\mathbf{m} = (u, v)^T$ , entonces  $\mathbf{M}$  puede ser representado como

$$\mathbf{M} = \lambda \tilde{\mathbf{m}} = \lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Si expresamos este punto en el sistema de coordenadas de la segunda cámara, se tiene:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{R}\mathbf{M} + \mathbf{t} = \lambda \mathbf{R}\tilde{\mathbf{m}} + \mathbf{t} , \quad (\text{B.4})$$

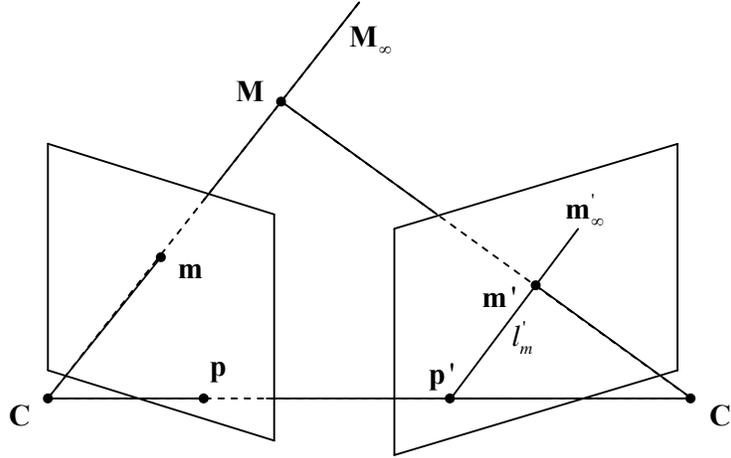


Figura B.1.- Geometría epipolar

La proyección de la línea  $\mathbf{C}\mathbf{M}_\infty$  en la segunda cámara es también una línea, denotada por  $\mathbf{l}'_m$  en la cual debe estar el punto correspondiente de la primera imagen. Esta propiedad es denominada restricción epipolar y la línea  $\mathbf{l}'_m$  es conocida como la línea epipolar de  $\mathbf{m}$ .

La línea epipolar puede ser definida por dos puntos. El primero de ellos puede ser obtenido proyectando  $\mathbf{M}'$  con  $\lambda = 0$ , que da  $\tilde{\mathbf{p}}' = \frac{1}{t_z} \mathbf{t}$  siendo  $t_z$  el tercer elemento del vector de traslación  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{p}'$  por las propiedades proyectivas también puede escribirse como  $\tilde{\mathbf{p}}' = \mathbf{t}$ . Este punto es de hecho la proyección del centro óptico de la primera cámara sobre la segunda. El segundo punto puede obtenerse proyectando  $\mathbf{M}'$  con  $\lambda = \infty$ , que da  $\tilde{\mathbf{m}}'_\infty = \frac{1}{\mathbf{r}_3^T \tilde{\mathbf{m}}} \mathbf{R}\tilde{\mathbf{m}}$ , donde  $\mathbf{r}_3$  es la tercera fila de la matriz de rotación  $\mathbf{R}$ ;  $\tilde{\mathbf{m}}'_\infty$  también puede escribirse como  $\tilde{\mathbf{m}}'_\infty = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{m}}$ .

La línea epipolar es el producto vectorial de estos dos puntos:

$$\mathbf{l}'_m = \tilde{\mathbf{p}}' \times \tilde{\mathbf{m}}'_\infty = \mathbf{t} \times \mathbf{R}\tilde{\mathbf{m}} = [\mathbf{t}]_\times \mathbf{R}\tilde{\mathbf{m}} \quad (\text{B.5})$$

*Propiedad de Restricción Epipolar.*

donde  $[\mathbf{t}]_{\times}$  es la matriz skew symmetric de  $\mathbf{t}$  (ver anexo A). Si  $\mathbf{E}$  es la matriz esencial definida como:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{R} \quad (\text{B.6})$$

entonces la expresión (B.5) puede escribirse como:

$$\mathbf{l}'_m = \mathbf{E} \tilde{\mathbf{m}} \quad (\text{B.7})$$

Es fácil ver que todas las líneas epipolares en la segunda imagen pasan por el punto  $p'$ . De hecho, las líneas epipolares en la segunda imagen son la proyección del haz de semi-líneas que empiezan en el centro óptico  $\mathbf{C}$  de la primera cámara, y ellas necesariamente pasarán a través del punto  $\mathbf{p}'$  que es la proyección de  $\mathbf{C}$ . El punto  $\mathbf{p}'$  es el epipolo de la segunda imagen.

Si invertimos el rol de ambas cámaras, se demuestra que la geometría epipolar es simétrica para ambas cámaras. El epipolo  $\mathbf{p}$  en la primera imagen es la proyección del centro óptico de la segunda cámara, obteniéndose  $\tilde{\mathbf{p}} = -\mathbf{R}^T \mathbf{t}$ . Dado un punto  $\mathbf{m}'$  en la segunda imagen, su correspondiente línea epipolar en la primera imagen es:

$$\mathbf{l}_m = -(\mathbf{R}^T \mathbf{t}) \times (\mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{m}}') = -\mathbf{R}^T [\mathbf{t}]_{\times} \tilde{\mathbf{m}}' = \mathbf{E}^T \tilde{\mathbf{m}}' \quad (\text{B.8})$$

por lo que la transpuesta  $\mathbf{E}^T$  define la línea epipolar en la primera imagen.



# ANEXO C

## DESCOMPOSICIÓN SINGULAR SVD

Es una extensión del concepto de valores propios para una matriz no cuadrada. Dada una matriz  $\mathbf{A}$  de dimensión  $m \times n$ , la matriz  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  tiene  $n$  valores propios no negativos  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ , ordenados de mayor a menor, que pueden ser expresados en la forma:

$$\lambda_i \geq \sigma_i^2 \quad \text{con} \quad \sigma_i \geq 0 \quad (\text{C.1})$$

Los escalares  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$  son llamados los valores singulares de  $\mathbf{A}$ . La descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz  $\mathbf{A}$  está dado por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (\text{C.2})$$

donde  $\mathbf{U}$  es una matriz ortogonal  $m \times m$ :

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m] \quad (\text{C.3})$$

$\mathbf{V}$  es una matriz ortogonal  $n \times n$ :

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \quad (\text{C.4})$$

y  $\mathbf{S}$  es una matriz  $m \times n$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{D} = \text{diag} \{ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r \} \quad (\text{C.5})$$

donde  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$ . El número de valores singulares no nulos es igual al rango  $r$  de la matriz  $\mathbf{A}$ .

*Anexo C.*

Las columnas de  $\mathbf{U}$  son los vectores propios de la matriz  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ , mientras que las columnas de  $\mathbf{V}$  los vectores propios de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ . Aplicando las propiedades descritas se cumple que

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i \quad \text{para } i = 1, \dots, r \quad (\text{C.6})$$

y que

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad \text{para } i = r+1, \dots, n \quad (\text{C.7})$$

# ANEXO D

## METODO DE LEVENBERG-MARQUARDT

El algoritmo de Levenberg-Marquadt [69] es un método iterativo para resolver un sistema de ecuaciones no lineales de la forma:

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{p}) \quad (\text{D.1})$$

donde  $\mathbf{x}$  es un vector con  $n$  datos tomados y  $\mathbf{p}$  es el vector de los  $m$  parámetros a estimar. Lo que se busca es minimizar el error:

$$\|\mathbf{x} - f(\hat{\mathbf{p}})\| \quad (\text{D.2})$$

donde  $\hat{\mathbf{p}}$  es el vector estimado de parámetros.

Se parte de unas condiciones iniciales  $\hat{\mathbf{p}}_0$ , entonces:

$$\mathbf{x} = f(\hat{\mathbf{p}}_0) + \boldsymbol{\varepsilon}_0 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{x} - f(\hat{\mathbf{p}}_0) \quad (\text{D.3})$$

Por otro lado, el error de los parámetros se puede representar por  $\Delta$  para las sucesivas  $k$  estimaciones de  $\mathbf{p}$  de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{p}}_{k+1} = \hat{\mathbf{p}}_k + \Delta_k \quad (\text{D.4})$$

Suponiendo que la función  $f$  es lineal en el entorno de  $\hat{\mathbf{p}}_k$ , se tiene:

$$f(\hat{\mathbf{p}}_k + \Delta_k) \approx f(\hat{\mathbf{p}}_k) + \mathfrak{J}_k \Delta_k \quad (\text{D.5})$$

Anexo D.

donde  $\mathfrak{J}_k = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}_k}$  es el jacobiano de la función  $f$  con respecto a  $\mathbf{p}$ .

Suponiendo que en la iteración  $(k+1)$  se ha alcanzado la minimización, se tiene entonces:

$$\mathbf{0} = \mathbf{x} - f(\hat{\mathbf{p}}_{k+1}) = \mathbf{x} - f(\hat{\mathbf{p}}_k) - \mathfrak{J}_k \Delta_k = \boldsymbol{\varepsilon}_k - \mathfrak{J}_k \Delta_k \quad (\text{D.6})$$

de donde:

$$\Delta_k = (\mathfrak{J}_k^T \mathfrak{J}_k)^{-1} \mathfrak{J}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (\text{D.7})$$

El método de Levenberg-Marquardt reemplaza el producto  $\mathbf{N} = \mathfrak{J}^T \mathfrak{J}$  por  $\mathbf{N}'$ , tal que:

$$\mathbf{N}' = \mathbf{N} + \lambda \mathbf{I} \quad (\text{D.8})$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad del mismo orden de  $\mathbf{N}$ . El valor inicial de  $\lambda$  es  $\lambda = 0.001$ .

Para la primera iteración, se tiene:

$$\Delta_0 = (\mathbf{N}'_0)^{-1} \mathfrak{J}_0^T \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \hat{\mathbf{p}}_1 - \hat{\mathbf{p}}_0 \quad (\text{D.9})$$

de donde se obtienen  $\hat{\mathbf{p}}_1$  y el nuevo error  $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{x} - f(\hat{\mathbf{p}}_1)$ . Conocido este error, se compara con el error anterior  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ . Si el nuevo error es menor que el anterior, se hace  $\lambda = \lambda/10$  y se actualizan  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  y  $\hat{\mathbf{p}}_0$  por  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  y  $\hat{\mathbf{p}}_1$ ; en caso contrario, sólo se hace  $\lambda = \lambda \times 10$ . Se repite este ciclo hasta que la diferencia entre los errores de una iteración y la anterior sea muy cercana a cero.

Aplicando este algoritmo en el cálculo de los elementos de los jacobianos de ambas imágenes en el método de estimación de la matriz fundamental (apartado 4.8.2), y considerando el conjunto de ecuaciones de la ecuación (4.51):

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{s}_i = \mathbf{J}_i \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \mathbf{s}'_i = \mathbf{J}'_i \Delta \mathbf{q} \\ 0 = \Delta \mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{J}}_i'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{J}}_i \Delta \mathbf{q} - \Delta \mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{J}}_i'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{s}}_i - \tilde{\mathbf{s}}_i'^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{J}}_i \Delta \mathbf{q} \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

por cada punto útil  $i$  utilizado, donde  $i = 1, \dots, i_{\max}$ , donde para nuestro sistema implementado el máximo número de puntos útiles es cinco:  $i_{\max} = 5$ .

*Método de Levenberg-Marquardt.*

Para el caso específico de un sistema de tres articulaciones, el jacobiano de la imagen en cada cámara, tiene la forma respectiva:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} J_{(2i-1)1} & J_{(2i-1)2} & J_{(2i-1)3} \\ J_{(2i)1} & J_{(2i)2} & J_{(2i)3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}'_i = \begin{bmatrix} J'_{(2i-1)1} & J'_{(2i-1)2} & J'_{(2i-1)3} \\ J'_{(2i)1} & J'_{(2i)2} & J'_{(2i)3} \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

Y las ecuaciones (D.10) tienen la forma  $\mathbf{x}_i = f(\mathbf{p}_i)$ , donde

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x'_i \\ \Delta y'_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

si  $\Delta \mathbf{q} = (\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3)^T$ ,  $f(\mathbf{p}_i)$  se expresa como:

$$f(\mathbf{p}_i) = \begin{bmatrix} \Delta q_1 J_{(2i-1)1} + \Delta q_2 J_{(2i-1)2} + \Delta q_3 J_{(2i-1)3} \\ \Delta q_1 J_{(2i)1} + \Delta q_2 J_{(2i)2} + \Delta q_3 J_{(2i)3} \\ \Delta q_1 J'_{(2i-1)1} + \Delta q_2 J'_{(2i-1)2} + \Delta q_3 J'_{(2i-1)3} \\ \Delta q_1 J'_{(2i)1} + \Delta q_2 J'_{(2i)2} + \Delta q_3 J'_{(2i)3} \\ \Delta \mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{J}}_i^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{J}}_i \Delta \mathbf{q} - \Delta \mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{J}}_i^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{s}}_i - \tilde{\mathbf{s}}_i^T \mathbf{F} \tilde{\mathbf{J}}_i \Delta \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

donde se ha introducido para la quinta fila de (D.13) la notación  $\tilde{\mathbf{J}}$  y  $\tilde{\mathbf{J}}'$  para hacerlos dimensionalmente compatibles con la notación en coordenadas proyectivas:

$$\tilde{\mathbf{J}}_i = \begin{bmatrix} J_{(2i-1)1} & J_{(2i-1)2} & J_{(2i-1)3} \\ J_{(2i)1} & J_{(2i)2} & J_{(2i)3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{J}}'_i = \begin{bmatrix} J'_{(2i-1)1} & J'_{(2i-1)2} & J'_{(2i-1)3} \\ J'_{(2i)1} & J'_{(2i)2} & J'_{(2i)3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{D.14})$$

Se tiene para los  $n$  puntos considerados:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} f(\mathbf{p}_1) \\ f(\mathbf{p}_2) \\ \vdots \\ f(\mathbf{p}_n) \end{pmatrix} \quad (\text{D.15})$$

El problema se simplifica agrupando los parámetros a estimar de la siguiente manera:

Anexo D.

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \quad (\text{D.16})$$

donde cada  $\mathbf{b}_i$  representa los elementos del jacobiano de la imagen asociados al punto  $i$ .

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} J_{(2i-1)1} \\ J_{(2i-1)2} \\ J_{(2i-1)3} \\ J_{(2i)1} \\ J_{(2i)2} \\ J_{(2i)3} \\ J'_{(2i-1)1} \\ J'_{(2i-1)2} \\ J'_{(2i-1)3} \\ J'_{(2i)1} \\ J'_{(2i)2} \\ J'_{(2i)3} \end{bmatrix} \quad (\text{D.17})$$

Se parte de un  $\hat{\mathbf{p}}$  estimado (en nuestro caso, el jacobiano inicial). Se calculan los vectores de error  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x} - f(\hat{\mathbf{p}})$  y las siguientes matrices:

$$\mathbf{B} = \left( \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{b}} \right) \quad (\text{D.18})$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} \quad (\text{D.19})$$

Se calcula la nueva matriz  $\mathbf{V}^*$ , donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad:

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{V} + \lambda \mathbf{I} \quad (\text{D.20})$$

y

$$\boldsymbol{\varepsilon}_B = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{D.21})$$

Se calcula el incremento:

*Método de Levenberg-Marquardt.*

$$\Delta = \mathbf{V}^{*-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}} \quad (\text{D.22})$$

Los nuevos parámetros serán:

$$\hat{\mathbf{p}}_{\text{Nuevo}} = \hat{\mathbf{p}} + \Delta \quad (\text{D.23})$$

Se calcula el nuevo error para este  $\hat{\mathbf{p}}_{\text{Nuevo}}$ , si es menor que el anterior se toma  $\lambda = \lambda/10$  y se recalculan los  $\hat{\mathbf{p}}$  a partir de los  $\hat{\mathbf{p}}_{\text{Nuevo}}$ . Si el error es mayor, se toma  $\lambda = \lambda \times 10$  y se vuelven a calcular los  $\hat{\mathbf{p}}_{\text{Nuevo}}$  a partir de los antiguos  $\hat{\mathbf{p}}$ . Se itera hasta que la diferencia entre los errores de una iteración a la siguiente sea próxima a cero.



# ANEXO E

## CONTROL SERVO VISUAL DE UN ROBOT MÓVIL

Se tienen dos robots móviles, uno seguidor y otro objetivo, donde el robot objetivo se mueve a lo largo de una trayectoria desconocida y con velocidad desconocida. El robot seguidor debe ser capaz de seguir al objetivo manteniendo una distancia constante  $d_d$  (distancia deseada) de tal manera que esté orientado hacia éste (es decir  $\varphi_d = 0$ ) utilizando solamente información visual.

El objetivo de control puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(t) = 0 \end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} e = d_d - d \\ \tilde{\varphi} = \varphi_d - \varphi \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

donde  $d$  y  $d_d$  son las distancias actual y deseada entre el robot móvil y el vehículo objetivo,  $\varphi$  y  $\varphi_d$  son los ángulos de orientación actual y deseado del robot móvil.

La evolución de la posición y orientación del robot móvil con respecto al vehículo objetivo será expresada en términos de una derivada temporal de estas dos variables  $e$  y  $\tilde{\varphi}$ . La variación en distancia es la diferencia entre las proyecciones de las velocidades de ambos móviles sobre la línea que les une:

$$\dot{e} = v \cos \tilde{\varphi} - v_r \cos \theta \quad (\text{E.2})$$

La variación del ángulo de error  $\tilde{\varphi}$  tiene tres términos: la velocidad angular del robot móvil y el efecto rotacional de las velocidades lineales de ambos vehículos, está expresado por:

Anexo E.

$$\dot{\tilde{\varphi}} = \omega + v_T \frac{\text{sen } \theta}{d} + v \frac{\text{sen } \tilde{\varphi}}{d} \quad (\text{E.3})$$

Se propone la siguiente ley de control no lineal:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\cos \tilde{\varphi}} (v_T \cos \theta - f(e)) \\ \omega &= -f(\tilde{\varphi}) - v_T \frac{\text{sen } \theta}{d} - v \frac{\text{sen } \tilde{\varphi}}{d} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

donde  $f(e), f(\tilde{\varphi}) \in \Omega$ , y  $\Omega$  es un conjunto de funciones definido como

$$\Omega = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(0) = 0 \text{ y } xf(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

En particular, se consideran las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f(e) &= k_e \tanh(\lambda_e e) \\ f(\tilde{\varphi}) &= k_\varphi \tanh(\lambda_\varphi \tilde{\varphi}) \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

las cuales previenen saturaciones de la señal de control,  $k_e, \lambda_e, k_\varphi, \lambda_\varphi$  son constantes. A partir de (E.2), (E.3), (E.4) se encuentran las ecuaciones de lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= -f_e(e) \\ \dot{\tilde{\varphi}} &= -f_\varphi(\tilde{\varphi}) \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

## ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

Considerando (E.6) para un punto de equilibrio en el origen, se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{e^2}{2} + \frac{\tilde{\varphi}^2}{2} \quad (\text{E.7})$$

y su derivada temporal en el sistema de trayectorias dada por:

$$\dot{V} = -ef(e) - \tilde{\varphi}f(\tilde{\varphi}) \quad (\text{E.8})$$

puesto que  $f(e), f(\tilde{\varphi}) \in \Omega$ , se concluye que existe estabilidad asintótica en el equilibrio, es decir:  $e(t) \rightarrow 0, \tilde{\varphi}(t) \rightarrow 0$  con  $t \rightarrow \infty$ .

Se puede ver que las ecuaciones (E.4) requieren conocer la velocidad lineal  $v_T$  del vehículo objetivo, la cual debe ser estimada a partir de la información visual disponible. Despejando de la ecuación (E.2), y considerando una diferencia discreta entre sucesivas posiciones con un período de muestreo  $T$ , esta velocidad puede ser estimada como:

$$\hat{v}_T = \frac{(d_k - d_{k-1})/T + v_k \cos \tilde{\varphi}_k}{\cos \theta_k} \quad (\text{E.9})$$

donde  $k$  representa el momento actual y  $k-1$  el momento anterior.

### ROBUSTEZ AL ERROR DE ESTIMACIÓN DE $v_T$ .

Considerando que velocidad del vehículo objetivo estimada  $\hat{v}_T$ , las ecuaciones de lazo cerrado (E.6) se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \Delta v_T \cos \theta - f(e) \\ \dot{\tilde{\varphi}} &= \Delta v_T \frac{\sin \tilde{\varphi}}{d} - f(\tilde{\varphi}) \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

donde  $\Delta v_T = v_T - \hat{v}_T$  es el error entre la velocidad real  $v_T$  y la estimada  $\hat{v}_T$  del vehículo objetivo. Considerando la función candidata de Liapunov (E.7), la derivada temporal de  $V$  es:

$$\dot{V} = e\dot{e} + \tilde{\varphi}\dot{\tilde{\varphi}} = -ef(e) - \tilde{\varphi}f(\tilde{\varphi}) + e\Delta v_T \cos \theta + \frac{\tilde{\varphi}\Delta v_T \sin \theta}{d} \quad (\text{E.11})$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -ef(e) + e\Delta v_T \cos \theta \\ \dot{V}_2 &= -\tilde{\varphi}f(\tilde{\varphi}) + \frac{\tilde{\varphi}\Delta v_T \sin \theta}{d} \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

una condición suficiente para que  $\dot{V}_1$  sea negativa es:

$$|e|f(e) > |e|\|\Delta v_T\| \quad (\text{E.13})$$

para un error pequeño  $e$  en el rango lineal de  $f(e)$ :

$$k_e |e| > \|\Delta v_T\| \quad (\text{E.14})$$

que garantiza que  $e(t)$  converja a la región  $B_{\delta_e} \big|_{t \rightarrow \infty} |e(t)| \rightarrow B_{\delta_e}$  con

$$\delta_e = \frac{\|\Delta v_T\|}{k_e} \quad (\text{E.15})$$

Una condición suficiente para que  $\dot{V}_2$  sea negativa, es tomando el rango lineal de  $f(\tilde{\varphi})$  para errores pequeños de  $\varphi$  y reemplazando  $d = d_d - \delta_e$ :

$$k_\varphi |\tilde{\varphi}| > \frac{\|\Delta v_T\|}{d_d - \delta_e} \quad (\text{E.16})$$

Lo que implica que el error  $\tilde{\varphi}$  converja a la región  $B_{\delta_\varphi} \big|_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\varphi}(t)| \rightarrow B_{\delta_\varphi}$  con

Anexo E.

$$\delta_\varphi = \frac{\|\Delta v_T\|}{k_\varphi(d_d - \delta_e)} = \frac{\|\Delta v_T\|}{k_\varphi(d_d - \frac{\|\Delta v_T\|}{k_e})} = \frac{\|\Delta v_T\|k_e}{k_\varphi(k_e d_d - \|\Delta v_T\|)} \quad (\text{E.17})$$

asumiendo que se satisface la siguiente condición:

$$k_e > \frac{\|\Delta v_T\|}{d_d} \quad (\text{E.18})$$

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Allen, P. K., Yoshimi, B., Timcenko, A. *Real-Time Visual Servoing*. Proceeding of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, California, April 1991.
- [2] Allen, P. K., Timcenko, A., Yoshimi, B., and Michelman, P. *Automated Tracking and Grasping of a Moving Object with a Robotic Hand-Eye System*. IEEE Trans. Robotics and Automation, 9(2):152-165, April 1993.
- [3] Allen, P., Yoshimi, B. and Timcenko, A. *Hand-Eye Coordination for Robotics Tracking and Grasping in Visual Servoing*. K. Hashimoto Ed. Singapore: World Scientific, pp. 33-70.
- [4] Aloimonos, Y., and Shulman, D. *Integration of Visual Modules*. Academic Press, Inc. 1989.
- [5] Anderson, R.L. *Dynamic Sensing in a Ping-Pong Playing Robot*. IEEE Trans. Robotics and Automation, 5(6):723-739, 1989.
- [6] Andreff, N., Espiau, B., and Horaud, R. *Visual Servoing from Lines*. International Research of Robotics Research. Vol. 21, No 8, pp. 679-699, 2002.
- [7] Angel L. *Control Visual de Robots Paralelos. Analisis, Desarrollo, y Aplicación a la Plataforma Robotenis*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 2005.
- [8] Asada, M. , Tanaka, T. and Hosoda, K. *Visual Tracking of Unknown Moving Object Adaptive Binocular Visual Servoing*. Proceedings of the 1999 IEEE Int. Conf. on Multisensor Fusion & Integration for Intelligent Systems. Taipei, Taiwan, 1999.
- [9] Basri, R., Rivlin, E., and Shimshoni, I. *Visual Homing: Surfing on the Epipoles*. International Journal of Computer Vision, 33(2), pp. 22-39, 1999.
- [10] Barrientos, A., Peñin, L.F., Balaguer, C., y Aracil, R. *Fundamentos de Robótica*. Ed. Mc Graw Hill /Interamericana de España S.A., Madrid, 1997.
- [11] Benhimane, S., and Malis, E. *Homography-Based 2D Visual Servoing*. Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Orlando Florida, Mayo, 2006.

*Bibliografía.*

- [12] Bensalah, F., and Chaumette, F. *Compensation of Abrupt Motion Changes in Target Tracking by Visual Servoing*. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robots Syst., IROS'95, Pittsburgh, PA, vol. 1, pp. 181-187, Aug. 1995.
- [13] Bien, Z., Jang, W., and Park, J. *Characterisation of Using Feature Jacobian Matrix for Visual Servoing*. K. Hashimoto Ed., Visual Servoing, vol. 7, pp. 317-363, World Scientific, Singapore, 1993.
- [14] Boufama, B., and Mohr, R. *Epipole and Fundamental Matrix Estimation Using Virtual Parallax*. Proceeding of the Fifth Conference on Computer Vision. Cambridge MA, USA, 1995.
- [15] Bourquardez, O., and Chaumette, F. *Visual Servoing of an Airplane for Alignment with Respect to a Runway*. Proceeding of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Roma, April 10-14 2007.
- [16] Broyden, C.G. *Mathematics of Computation*. V. 19, pp. 577-593, 1965.
- [17] Caprile, B., and Torre, V. *Using Vanishing Points for Camera Calibration*. International Journal of Computer Vision. 4, pp. 127-140. 1990.
- [18] Carelli, R., Soria, C.M., and Morales B. *Vision-Based Tracking Control for Mobile Robots*. Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Conference on Advance Robotics ICAR'05, July 18-20, pp.148-152, 2006.
- [19] Cervera, E., Berry, F., and Martinet, P. *Stereo Visual Servoing with a Single Point: a Comparative Study*. Proceedings of the IEEE International Conference on Advanced Robotics (ICAR'01), pp. 213-218, Budapest Hungary.
- [20] Chaumette F. *Image Moments: A General and Useful Set of Features for Visual Servoing*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 20, No 4, 2004.
- [21] Chaumette, F. *Potencial Problems of Stability and Convergence in Image-Based and Position-Based Visual Servoing*. The Confluence of Vision and Control, LNCIS Sseries D. Kriegman, G. Hager and A. Morse Eds. New York Springer Verlag Vol. 237, pp. 66-78, 1998.
- [22] Chaumette, F. Malis, E. *2 1/2D Visual Servoing: a Possible Solution to Improve Image-Based and Position-Based Visual Servoing*. Proceedings IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, San Francisco, CA, 2000.
- [23] Chaumette, F., Malis, E., and Boudet, S. *2D1/2 Visual Servoing with Respect a Planar Object*. Workshop on New Trends in Image-Based Robots Servoing, IROS'97, pp. 45-52, Grenoble, France, 1997.
- [24] Chaumette, F. and Santos, A. *Tracking a Moving Object by Visual Servoing*. Proc. of 12<sup>th</sup> World Congress IFAC, vol. 9, pp. 409-414, Sydney, July 1993.
- [25] Chaumette, F.,and Hutchinson, S. *Visual Servo Control Part I: Basic Approaches*. Robotics & Autonomous Magazine, IEEE, vol.14, issue 1, pp. 109-118, Dec., 2006.
- [26] Chaumette, F.,and Hutchinson, S. *Visual Servo Control Part II: Advanced Approaches*. Robotics & Autonomous Magazine, IEEE, vol.13, issue 4, pp. 82-90, March, 2007.
- [27] Chesi, G., Hashimoto, K., Prattichizio, D., and Vicino, A. *Keeping Features in the Field of View in Eye-in-Hand Visual Servoing: A Switching Approach*. IEEE Trans. Robot Automat., vol. 20, N° 5, pp. 908-913, Oct. 2004.
- [28] Chou, J.C.K. and Kamel, M. *Finding the Position and Orientation of a Sensor on a Robot Manipulator Using Quaternions*. Int. Journal of Robotics Research, 10(3):240-254, June 1991.

*Bibliografía.*

- [29] Cipolla, R., Drummond, T., and Robertson, D. *Camera Calibration from Vanishing Points in Images of Architectural Scenes*. Proceedings of the British Machine Vision Conference, 2:382-391, 1999.
- [30] Colombo, C. Allota, B., and Darío, P. *Affine Visual Servoing: A Framework for Relative Positioning with a Robot*. Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 464-471, Nagoya, Japan, 1995.
- [31] Comport A.I., Marchand E., Pressigout M., and Chaumette F. *Real-Time Markerless Tracking for Augmented Reality: The Virtual Visual Servoing Framework*. IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics, Vol 12, No 4, pp. 615-628, July 2006.
- [32] Conkie, A. and Chongstitvatana, P. *An Uncalibrated Stereo Visual Servo System*. Technical Report DAITR 475, 1990.
- [33] Corke, P.I. *Visual Control of Robot Manipulator – A Review*. K. Hashimoto Ed., “Visual Servoing”, World Scientific, pp. 1-32, 1994.
- [34] Corke, P.I., and Good, M. *Dynamic Effects in Visual Closed-Loop Systems*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 12, N° 5, October, 1996.
- [35] Corke, P.I., and Hutchinson, S.A., *A New Partitioned Approach to Image-Based Visual Servo Control*. IEEE Transaction on Robotics and Automation, Vol. 17, No 4, August, 2001.
- [36] Cretual, A, and Chaumette, F. *Positioning a Camera Parallel to a Plane Using Dynamic Visual Servoing*. IEEE Int. Conf. On Intelligent Robots and Systems, Vol. 1, pp. 43-48, Grenoble, France, 1997.
- [37] Daniilidis, K. *Hand-Eye Calibration Using Dual Quaternions*. The International Journal of Robotics Research. Vol. 18, No 3, pp. 286-298, March, 1999.
- [38] Deguchi, K., and Noguchi, T. *Visual Servoing Using Eigenspace Method and Dynamic Calculation of Interaction Matrices*. Int. Conf. on Pattern Recognition ICPR’96, pp. 302-306, 1996.
- [39] Deguchi, K. *Optimal motion Control for Image-Based Visual Servoing by Decoupling Translation and Rotation*. Proceedings of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, Victoria, B.C. Canada, 1998.
- [40] Dementhon, D., and Davis, D.S. *Model-Based Object Pose in 25 Lines of Code*. International Journal of Computer Vision, 15(1/2), pp. 123-141, 1995.
- [41] Deng, L., Janabi-Sharifi, F., and Wilson, W.J. *Stability and Robustness of Visual Servoing Methods*. Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Washington, DC, May, 2002.
- [42] Deng, Z. and Jagersand, M. *Evaluation of Model Independent Image-Based Visual Servoing*. Canadian Conference on Computer and Robot Vision CRV, pp. 138-144 2004.
- [43] Domingo, J., and Pelechano, J. *Measurement and Storage of a Network of Jacobians as a Method for the Visual Positioning of a Robot Arm*. Journal of Intelligent and Robotic Systems, vol. 16 pp. 407-422, 1996.
- [44] Dornaika, F. and Horaud, R. *Simultaneous, Robot-World and Hand-Eye Calibration*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol 14, No 4, August 1998.
- [45] Eggert, D.W., Larusso, A. and Fisher, R.B. *Estimation 3D Rigid Body Transformations: A Comparison of Major Algorithms*. Machine Vision and Applications. Springer Verlag, 1997.

*Bibliografía.*

- [46] Espiau, B. *Effect of Camera Calibration Errors on Visual Servoing in Robotics*. 3<sup>rd</sup>. International Symposium on Experimental Robotics, Kyoto, Japan, October 1993.
- [47] Espiau, B., Chaumette, F. and Rives, P. *A New Approach to Visual Servoing in Robotics*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 8, No 3, 1992.
- [48] Fang, Y., Behal, A., Dixon, W.E., and Dawson, D.M. *Adaptive 2.5D Visual Servoing of Kinematically Redundant Robots Manipulators*. Proceedings of the 41<sup>st</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada USA, 2002.
- [49] Faugeras, O.D. *What Can Be Seen in Three Dimensions With an Uncalibrated Stereo Rig*. Giulio Sandidni editor, Proceedings of the European Conference on Computer Vision, pp. 563-578. Springer Verlag, LNCS 588, 1992.
- [50] Faugeras, O. *Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric View Point*. MIT Press, Cambridge MA, 1993.
- [51] Faugeras, O.D. and Toscani, G. *The calibration problem for stereo*. Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. pp. 15-20, 1986.
- [52] Faugeras, O., and Lustman, F. *Motion and Structure From Motion in a Piecewise Planar Environment*. Int. Journal on Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2(3), pp. 485-508. 1988.
- [53] Feddema, J.T., George Lee, C.S., and Mitchell, O.R. *Weighted Selection of Image Features for Resolved Rate Visual Feedback Control*. IEEE Trans. On Robotics and Automation, 7(1), 31-47, February, 1991.
- [54] Flandin, G., Chaumette, F., and Marchand E. *Eye-in-Hand/Eye-to-Hand Cooperation For Visual Servoing*. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, San Francisco, 2000.
- [55] Frew, E., McGee, T., Kim, Z., Xiao, X., Jackson, S., Morimoto, M., Rathinam, S., Padiyal, J., and Sengupta, F. *Vision-Based Road Following Using a Small Autonomous Aircraft*. IAC'04, Big Ksy, MT, March 2004.
- [56] Ganapathy, S. *Decomposition of Transformation Matrices For Robot Vision*. Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation. Atlanta, pp. 130-139, March, 1984.
- [57] García N. *Técnicas Avanzadas Para el Control Visual de Robots Basadas en Características de la Imagen. Aplicación a la Solución de Posibles Singularidades*. Tesis doctoral, Universidad Manuel Hernández, Elche.
- [58] Grosso, E., Metta, G., Oddera, A., and Sandini, G. *Robust Visual Servoing in 3-D Reaching Tasks*. IEEE Transsactions on Robotics and Automation, 12(5): 732-742, October 1996.
- [59] Hadj-Abdelkader, H., Mezouar, Y., Andreff, N., and Martinet, P. *Decoupled Homography-Based Visual Servoing With Omnidirectional Cameras*. Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Beijing, China, October 9-15, 2006.
- [60] Hafez, A.H.A, and Jawahar C.V. *Visual Servoing by Optimization of a 2D/3D Hybrid Objective Function*. Proceedings of the 2007 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Roma, Italy, 10-14 April, 2007.
- [61] Hager, G.D. *Real-Time Feature Tracking And Projective Invariance As a Basis For Hand-Eye Coordination*. Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 533-539, 1994.

*Bibliografía.*

- [62] Hager, G.D. *Calibration-Free Visual Control Using Projective Invariance*. Proceedings of the Fifth International Conference on Computer Vision, pp. 1009-1015, 20-23 June 1995.
- [63] Hager, G.D., Chang, W.C., and Morse, A.S. *Robot Hand-Eye Coordination Based on Stereo Vision*. IEEE Control Systems Magazine, 15(1): 30-39, 1995.
- [64] Hager, G.D. *A Modular System for Robust Positioning Using Feedback From Stereo Vision*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 13, No 4, August 1997.
- [65] Han, S.H., Choi, J.W., Son, K., Lee, M.C., Lee, J.M., and Lee, M.H. *A Study on a Feature-Based Visual Servoing System of Intelligent Robot System by Utilizing Redundant Feature*. Proc. of ISIE'2000 Cholula Puebla, Mexico, 2000.
- [66] Hartley, R.I. *Estimation of Relative Camera Position for Uncalibrated Cameras*. European Conference on Computer Vision. LNCS vol. 588, pp. 579-587, 1992.
- [67] Hartley, R.I. *In Defence of the Eight-Point Algorithm*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 19, N° 6, June, 1997.
- [68] Hartley, R.I., and Sturm, P. *Triangulation*. Computer Vision and Image Understanding. Vol. 68, No 2, pp. 146-157, November, 1997.
- [69] Hartley, R.I. and Zisserman, A. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2001.
- [70] Hashimoto K. *A review on vision-based control of robot manipulators*. Advanced Robotics, Vol. 17, No 10, pp. 969-991, 2003.
- [71] Hashimoto, H., Kubota, T., Sato, M., and Harashima, F. *Visual Control of Robotic Manipulator on Neural Networks*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 39, No 6, December 1992.
- [72] Hashimoto K., Kimoto T., Ebine T., and Kimura H. *Manipulator Control with Image-Based Visual Servo*. Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, California, April 1991.
- [73] Hashimoto, K., and Kimura, H. *Dynamic Visual Servoing With Nonlinear Model-Based Control*. 12<sup>th</sup> World Congress IFAC, volume 9, pp. 405-408, Sidney, Australia, 1993.
- [74] Hashimoto, K., Ebine, T., and Kimura, H. *Visual Servoing with Hand-Eye Manipulator-Optimal Control Approach*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 12, N° 5, October 1996.
- [75] Hashimoto, K., and Namiki, A., and Ishikawa, M. *A Visuo-Motor Control Architecture For High Speed Visual Servoing*. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Switzerland, 2002.
- [76] Hill, J., and Park, W.T. *Real Time Control of a Robot with a Mobile Camera*. Proceedings of the 9<sup>th</sup> ISIR, Washington DC, March, pp. 233-246, 1979.
- [77] Hollinghurst, N., and Cipolla, R. *Uncalibrated Stereo Hand Eye Coordination*. Image and Vision Computing, vol. 12, No. 3, pp. 187-192, 1994.
- [78] Horaud, R., and Monga, O. *Vision par Ordinateur*. Hermes, Paris, 1995.
- [79] Horaud, R., Dornaika, F., and Espiau, B. *Visually Guided Object Grasping*. IEEE Trans. On Robotics and Automation, 14(4), pp. 525-532. August 1998.
- [80] Horn, B.K.P. *Close-Form Solution of Absolute Orientation Using Unit Quaternions*. J. Opt. Soc. Am. Ser. A 4: 629-642, 1987.

*Bibliografía.*

- [81] Horn, B.K.P., Hilden, H.M., Negahdaripour, S. *Close-Form Solution of Absolute Orientation Using Orthonormal Matrices*. J. Opt. Soc. Am. Ser. A 5: 1127-1135. 1988.
- [82] Hosoda, K. and Asada, M. *Versatile Visual Servoing without Knowledge of True Jacobian*. IEEE/ International Conference on Intelligent Robots and Systems, pp.186-193, 1994.
- [83] Hosoda K., Sakamoto K., and Asada M.. *Trajectory Generation For Obstacle Avoidance of Uncalibrated Stereo Visual Servoing 3D Reconstruction*. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robot and Systems, Vol 1(3), pp. 29-34, 1995.
- [84] Hosoda, K., Igarashi K., And Asada, M. *Adaptive Hybrid Visual Servoing/Force Control in Unknown Environment*. Intelligent Robots and Systems '96, IROS 96, Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference Volume 3, 4-8 pp.1097 – 1103, 1996.
- [85] Hutchinson, S., Hager, G.D. and Corke, P.I. *A tutorial on Visual Servo Control*. IEEE Transaction on Robotics and Automation. Vol. 12 No 5, 1996.
- [86] Hutchinson, S., and Gans, N. *Switching Approaches to Visual Servo Control*. Proceedings IEEE Int. Symposium, 27-30 October, 2002.
- [87] Iwatsuki, M., and Okiyama, N. *A New Formulation of Visual Servoing Based on Cylindrical Coordinate System*. IEEE Trans. Robot. Automat., vol 21, N° 2, pp. 266-273, April, 2005.
- [88] Jagersand, M., Nelson, R. and Fuentes, O. *Experimental Evaluation of Uncalibrated Visual Servoing for Precision Manipulation*. Proceedings of Int. Conf. Robotics & Automation, 1997.
- [89] Jagersand, M. and Nelson, R. *Visual Space Task Specification, Planning and Control*. Proceedings IEEE Int. Symp. On Computer Vision, 1995.
- [90] Jagersand, M. *Image Based View synthesis of Articulated Agents*. Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 1047-1053, 1997.
- [91] Jagersand, M. and Nelson, R. *Adaptive Differential Visual Feedback for Uncalibrated Hand-Eye Coordination and Motor Control*. TR No 579. U. of Rochester, 1994.
- [92] Jang, W., and Bien, Z. *Feature-based Visual Servoing of an Eye-in-Hand Robot with Improved Tracking Performance*. Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Sacramento, California, April, 1991.
- [93] Khadraoui, D., Motyl, G., Martinet, P., Gallice, J., and Chaumette, F. *Visual Servoing in Robotics Scheme Using a Camera/Laser-Stripe Sensor*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 12, N° 5, October, 1996.
- [94] Kelly, R. *Robust Asymptotically Stable Visual Servoing of Planar Robots*. IEEE Transaction on Robotics and Automation, Vol. 12, No 5, October, 1996.
- [95] Kelly, R., Shirkey, P., and Spong, M.W. *Fixed-Camera Visual Servo Control for Planar Robots*. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Minneapolis, Minnesota, April, 1996.
- [96] Kelly, R., Carelli, R., Nasisi, O., Kuchen, B., and Torres, F. *Stable Visual Servoing of Camera-in-Hand Robotic Systems*. IEEE/ASME Transaction on Mechatronics, vol. 5, No 1, March, 2000.

*Bibliografia.*

- [97] Kelly, R., Favela, J., Ibarra, J., and Bassi, D. *Asymptotically Stable Visual Servoing of Manipulators via Neural Networks*. Journal of Robotic Systems 17, N° 12, pp. 659-669, 2000.
- [98] Kragic, D. *Visual Servoing for Manipulation: Robustness and Integration Issues*. PhD thesis, Computational Vision and Perceptive Laboratory (CVAP), Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2001.
- [99] Kragic, D., and Christensen, H. *Cue Integration for Visual Servoing*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 17, N° 1, February, 2001.
- [100] Kragic, D., Bjorkman, M., Christensen, H.I., and Eklundh, J.O. *Vision for Robotic Object Manipulation in Domestic Settings*. Robotics and Autonomous Systems Vol. 52, pp. 85-100, 2005.
- [101] Kim, G.W., Lee, B.H. and Kim, M.S. *Uncalibrated Visual Servoing Technique Using Large Residual*. Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics & Automation. Taipei, Taiwan, September 14-19, 2003.
- [102] Lamiroy, B., Espiau, B., Andreff, N., and Horaud, R. *Controlling Robots with Two Cameras: How to Do Properly*. Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2100-2105, 2000.
- [103] Lamiroy, B. Puget, C. Horaud, R. *What Metric Stereo Can Do for Visual Servoing*. Proceedings of the 2000 IEEE/RSJ Int. Conf. On Intelligent Robots and Systems, pp. 251-256, 2000.
- [104] Lapresté, J.T., Jurie, F., Dhome, M., and Chaumette, F. *An Efficient Method to Compute the Inverse Jacobian Matrix in Visual Servoing*. Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation, New Orleans, LA, April, 2004.
- [105] Li, M., Betsis, D. and Lavest, J.M. *Kinematic Calibration of the KTH Head-Eye System*. Technical Report Computational Vision and Active Perception Laboratory. Nov, 1994.
- [106] Lippiello, V., Siciliano, B. and Villani, L. *Position and Orientation Estimation Based on Kalman Filtering of Stereo Images*. Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications, Mexico City, September 5-7, 2001.
- [107] Lippiello, V., Siciliano, B. and Villani, L. *Robust Visual Tracking Using a Fixed Multi-Camera System*. Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics & Automation, Taipei, September 14-19, 2003.
- [108] Longuet-Higgins, H.C. *A Computer Program for Reconstructing a Scene from Two Projections*. Nature, vol. 392, pp. 133-135, 1981.
- [109] Ma, Y., Soatto, S., Kosecka, J., and Sastry, S.S. *An Invitation to 3-D Vision: From Images to Geometric Models*. New York: Springer-Verlag Inc, 2003.
- [110] Mahony, R., and Hamel, T. *Image-Based Visual Servo Control of Aerial Robotic System using Linear Features System*. ITRA'05, pp. 227-239, Vol. 21, April, 2005.
- [111] Malis, E. *Contributions A La Modelisation Et A La Commande En Asservissement Visuel*. Ph.D. Thesis, Univ. Rennes I, IRISA, France, Nov., 1998.
- [112] Malis, E. *Theoretical Improvements in the Stability Analysis of a New Class of Model-Free Visual Servoing Methods*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 18, No 2, 2002.
- [113] Malis, E. *An Unified Approach to Model-Based and Model-Free Visual Servoing*. European Conference of Computer Vision. Denmark, May, 2002.

*Bibliografia.*

- [114] Malis, E. *Survey of Vision-Based Robot Control*. ENSIETA European Naval Ship Design Short Course, Brest, France, April, 2002.
- [115] Malis, E. *Improving Vision-Based Control Using Efficient Second-Order Minimization Techniques*. Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat., pp. 1843-1848, April, 2004.
- [116] Malis, E., Chesi, G., and Cipolla, R. *2½D Visual Servoing With Respect to Planar Contours Having Complex and Unknown Shapes*. Int. Journal of Robotics Research, Vol. 22, No 10-11, pp. 841-853, 2003.
- [117] Malis, E., Chaumette, F., and Boudet, S. *2½D Visual Servoing*. IEEE Trans. on Robotics and Automation, 15(2), pp. 234-246, 1999.
- [118] Malis, E., Chaumette, F., and Boudet, S. *Multi-Cameras Visual Servoing*. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation. San Francisco, CA, April 2000.
- [119] Malis, E., and Chaumette, F. *2 ½ Visual Servoing With Respect to Unknown Objects through a New Estimation Scheme of Camera Displacement*. International Journal Computer Vision 37(1), pp. 79-97. 2000.
- [120] Marchand, E., and Hager, G.D. *Dynamic Sensor Planning in Visual Servoing*. Int. Conf. on Robotics and Automation, Leuven, Belgium, pp. 1988-1993, 1998.
- [121] Mansard, N., Lopes, M., Santos, V.J., and Chaumette, F. *Jacobian Learning Methods for Tasks Sequencing in Visual Servoing*. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Beijing, China, October 9-15, 2006.
- [122] Martin, F., and Horaud, R. *Multiple-camera tracking of Rigid objects*. International Journal of Robotics Research. Vol. 21, No. 2, pp. 97-113, 2002.
- [123] Martinet, P., and Gallice, J. *Position Based Visual Servoing Using a Non-Linear Approach*. Proceedings of the 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligence Robots and Systems, Volume 1, 17-21 Page(s):531-536, Oct., 1999.
- [124] Martinet, P., and Cervera, E. *Stacking Jacobians Properly in Stereo Visual Servoing*. Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul, Korea, May 21-26 2001.
- [125] Maru, N., Kase, H., Yamada, S., Nishikawa, A., and Miyazaki, F. *Manipulator Control by Visual Servoing With Stereo Vision*. Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Yokohama, Japan, July 26-30, 1993.
- [126] Maybank, S.J., and Faugeras, O.D. A theory of self-calibration of a moving camera. The International Journal of Computer Vision, 8(2): 123-152, Aug., 1992.
- [127] Mezouar, Y., and Chaumette, F. *Path Planning in Image Space for Robust Visual Servoing*. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, CA. April, 2000.
- [128] Mezouar, Y., and Chaumette, F. *Design and Tracking of Desirable Trajectories in the Image Space by Integrating Mechanical and Visibility Constraints*. Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul, Korea. May 21-26, 2001
- [129] Mezouar, Y., and Chaumette, F. *Optimal Camera Trajectory with Image-Based Control*. International Journal of Robotics and Research. Vol. 22, No 10-11, pp. 781-803, October-November 2003.

*Bibliografía.*

- [130] Michel, H., and Rives, P. *Singularities in the Determination of the Situation of a Robot Effector From the Perspective View of the Three Points*. INRIA Research Report, Tech. Rep. 1850, Feb., 1993.
- [131] Nagahama, K., Hashimoto, K., Noritsugu, T., and Takaiawa, M. *Visual Servoing Based on Object Motion Estimation*. Proceedings of the 2000 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, Volume 1, pp. 245–250, 31 Oct.-5 Nov., 2000.
- [132] Namiki, A., Nakabo, Y., Ishii, I., and Ishikawa, M. *1-ms Sensory-Motor Fusion System*. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, vol. 5, No 3, September 2000.
- [133] Namiki, A., Hashimoto, K., and Ishikawa, M. *A Hierarchical Control Architecture for High-Speed Visual Servoing*. International Journal of Robotics Research, vol. 22, No 10-11, pp. 873-888, 2003.
- [134] Nelson, B. and Kosla, P.K. *Integrating Sensor Placement and Visual Tracking Strategies*. Proc. IEEE Int. Conf. On Robotics and Automation. pp. 1351-1356, 1994.
- [135] Odobez, J., and Bouthemy, P. *Robust Multiresolution Estimation of Parametric Motion Models*. Journal of visual communication and Image Representation, 6(4), pp. 348-365, 1995.
- [136] Oh, P.Y., and Allen, P.K. *Visual Servoing by Partitioning Degrees of Freedom*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 17, No 1, February 2001.
- [137] Oh, P.Y., and Allen, P.K. *Performance of a Partitioned Visual Feedback Controller*. Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation Detroit, Michigan, May, 1999.
- [138] Papanikolopoulos, N.P., and Khosla, P.K. *Adaptive Robotics Visual Tracking: Theory and Experiments*. IEEE Transactions on Automatic and Control, vol 38 N3, 1993.
- [139] Papanikolopoulos, N.P., Khosla, P.K., and Kanade, T. *Visual Tracking of a Moving Target by a Camera Mounted on a Robot: A Combination of Vision and Control*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol 9, pp. 14-35, 1993.
- [140] Pari, L., Sebastián, J.M., González, C., and Angel, L. *Image Based Visual Servoing: a New Method for the Estimation of the Image Jacobian in Dynamic Environments*. Lecture Notes in Computer Science 4141: pp. 850-861, 2006.
- [141] Pichler, A. and Jagersand, M. *Uncalibrated Hybrid Force-Vision Manipulation*. Proceedings of the 2000 IEEE/RSJ Int. conf. On Intelligent Robots and Systems, 2000.
- [142] Piepmeier, J.A., McMurray, G.V. and Lipkin, H. *A Dynamic Quasi-Newton Method for Uncalibrated Visual Servoing*. Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp 1595-1600, 1999.
- [143] Piepmeier, J. A., McMurray, G.V. and Lipkin, H. (1999). *A Dynamic Jacobian Estimation for Uncalibrated Visual Servoing*. Proceedings of the 1999 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, pp 944-949, 1999.
- [144] Piepmeier, J.A., McMurray, G.V. and Lipkin, H. *Uncalibrated Dynamic Visual Servoing*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 20, No 1, 2004.
- [145] Piepmeier, J.A., McMurray, G.V. and Lipkin, H. *Tracking a Moving Target with Model Independent Visual Servoing: a Predictive Estimation Approach*.

Bibliografía.

- Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation. Belgium, pp 2652-2657, 1998.
- [146] Piepmeier, J. A., McMurray, G.V. and Pfeiffer, A. *Uncalibrated Target Tracking with Obstacle Avoidance*. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation. San Francisco, CA, 2000.
- [147] Piepmeier, J.A. *Uncalibrated Vision-Based Mobile Robot Obstacle Avoidance*. Proceedings 33<sup>rd</sup> Southeastern Symposium on System Theory 18-20 March, pp. 251-255, 2001.
- [148] Piepmeier, J.A., Gumpert, B.A. and Lipkin, H. *Uncalibrated Eye-in-Hand Visual Servoing*. Proceedings IEEE International Conference on Robotics & Automation. Washington DC, 2002.
- [149] Piepmeier, J.A. *Experimental Results for Uncalibrated Eye-in-Hand Visual Servoing*. Proceedings of the 35th Southeastern Symposium On System Theory. Morgantown, 2003.
- [150] Pomares J. *Control Visual 2D Indirecto Para el Seguimiento Intemporal de Trayectorias y su Aplicación a Estrategias de Control Visual-Fuerza en Manipuladores*. Tesis Doctoral, Universidad de Alicante, 2004.
- [151] Pomares J., and Torres F. *Movement Flow-Based Visual Servoing and Force Control Fusion for Manipulation Tasks in Unstructured Environments*. IEEE Transactions on Man and Cybernetics Applications and Reviews 35 (1): 4-15, Feb 2005.
- [152] Pomares J., Chaumette F., and Torres F. *Adaptive Visual Servoing by Simultaneous Camera Calibration*. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Roma, Italy, 10-14 April 2007.
- [153] Reinoso García O. *Análisis y Generación de Algoritmos de Visión Artificial con Precisión Subpixel*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, E.T.S.I.I.M., 1996.
- [154] Ritter, H., Martinetz, T, and Schulten, K. *Neural Computation and Self-Organizing Maps*. Addison-Wesley, 1992.
- [155] Rives, P., and Azinheira, J.R. *Linear Structures Followed by an Airship using Vanishing Point and Horizon Line in Visual Servoig Scheme*. ICRA'2004, pp. 255-260, Vol. 1, New Orleans, April 2004.
- [156] Rizzi, A.A., and Koditschek, D.E. *An Active Visual Estimator for Dextrous Manipulation*. IEEE Trans. Robotics and Automation, 12(5):697-713, 1996.
- [157] Ruf, A., and Horaud, R. *Visual Trajectories From Uncalibrated Stereo*. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and System, IROS'97 pp. 83-91, 1997.
- [158] Ruf, A., Martin F., Lamiroy B., and Horaud R. *Visual Servoing Using Projective Kinematics*. Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Symposium on Robotics Research, Snowbird, UT, October, 1999.
- [159] Qian, J. and Su, J. *Online Estimation of Image Jacobian Matrix by Kalman-Bucy Filter for Uncalibrated Stereo Vision Feedback*. Proceedings of the 2002 IEEE Int. Conf. On Robotics and Automation. Washington DC, 2002.
- [160] Samson, C., Espiau, B, and Le Borgne, M. *Robot Control: The Task Function Approach*. Oxford University Press. Oxford, 1991.
- [161] Sanderson, A., and Weiss, L. *Image-Based Visual Servo Control Using Relational Graph Error Signals*. Proc. IEEE pp. 1074-1077, 1980.
- [162] Sebastian, J.M., Pari, L., Gonzales, C., and Angel, L. *A New Method For the Estimation of the Image Jacobian of the Control of the Uncalibrated Join*

Bibliografía.

- System. Lecture Notes in Computer Sciences LNCS. Vol 3522, pp. 631-638, 2005.
- [163] Sequeira, P.J., Caldas, J.R. *Camera Configurations of a Visual Servoing Setup, for a 2 DOF Planar Robot*. Proceedings of the 7<sup>th</sup> IFAC Symposium on Robot Control SYROCO 2003, Wroclow, Poland, September 1-3, 2003.
- [164] Sequeira, P.J., Mendonca, L.F., Sousa, J., and Caldas, J.R. *Uncalibrated Eye-to-Hand Visual Servoing Using Inverse Fuzzy Models*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, to appear, 2007.
- [165] Scheering, C., and Kersting, B. *Uncalibrated Hand-Eye Coordination with a Redundant Camera*. Proceeding of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation, Leuven, Belgium, May, 1998.
- [166] Sciavicco, L., and Siciliano, B. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer-Verlag, London, 2005.
- [167] Shen, Xiao-Jing and Pan, Jun-Min. *A Simple Adaptive Control for Visual Servoing*. Proceedings of the Second International Conference on Machine Learning and Cibernetics, Xi'an, 2003.
- [168] Shiray, Y., and Inoue, H. *Guiding a Robot by Visual Feedback in Assembly Tasks*. Pattern Recognition. 5, pp. 99-108, 1973.
- [169] Shiu, Y.C., Ahmad S. *Calibration of Wrist-Mounted Robotic Sensors by Solving Homogeneous Transform Equations of the Form  $AX=XB$* . IEEE Transaction on Robotics and Automation, Vol. 5 No. 1, February, 1989.
- [170] Silveira, G.F., Carvalho, R.H., Rives, P., Azinheira, J., Bueno, S., and Madrid, M. *Optimal Visual Servoed Guidance of Outdoor Autonomous Robotic Airships*. Proceedings of the American Control Conference, Anchorage, AK, 2002.
- [171] Silveira, G.F., Azinheira, J.R., Rives, P., and Bueno, S. *Line Following Visual Servoing for Aerial Robots Combined with Complementary Sensors*. ICAR'03, Coimbra, Portugal, pp. 1160-1165, July 2003.
- [172] Su, J., Pan, Q., and Luo, Z. *Full DOF calibration-Free Robotic Hand-Eye Coordinaron Based on Fuzzy Neural Network*. F. Yin, J. Wang, and C. Guo (Eds.): ISNN2004, LNCS 3174, pp. 7-12, 2004.
- [173] Suh, I. *Visual Servoing of Robot Manipulators by Fuzzy Membership Function Based Neural Networks*. K. Hashimoto editor, Visual Servoing, pp. 285-315, Wold Scientific, Singapore, 1993.
- [174] Sutanto, H., Sharma, R. and Varma, V. *Image Based Autodocking without Calibration*. Proceedings of the 1997 IEEE Int. Conf. On Robotics and Automation. Albuquerque, New Mexico, 1997.
- [175] Tahri, O., and Chaumette, F. *Image Moments: Generic Descriptors for Decoupled Image-based Visual Servo*. Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation, New Orleans, LA, April, 2004.
- [176] Thuilot, B., Martinet, P., Cordesses, L., and Gallice, J. *Position Base Visual Servoing: Keeping the Object in the Field of Vision*. Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation, Washington DC, May, 2002.
- [177] Torres, F., Pomares, J., Gil, P., Puente, S.T., and Aracil, R. *Robots y Sistemas Sensoriales*. Ed. Prentice Hall, España, 2002.
- [178] Tsai, R.Y. *A Versatile Camera Calibration Technique for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology Using Off-the-Shelf TV Cameras and Lenses*. IEEE

Bibliografía.

- Journal of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, No. 4, pp. 323-344, August 1987.
- [179] Tsai, R.Y., and Lenz, R.K. *A New Technique for Fully Autonomous and Efficient 3-D Robotics Hand/Eye Calibration*. *IEEE J. Robot. Automat.*, vol. 5, pp. 345-358, June, 1989.
- [180] Tonko, M., and Ángel, H.H. *Model-Based Stereo Tracking of Non-Polihedral Objects for Automatic Disassembly Experiments*. *International Journal of Computer Vision* 37(1), pp. 99-118, 2000.
- [181] Umeyama, S. *Least Squares Estimation of Transformation Parameters Between Two Point Patterns*. *IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence*, Vol 13, No 4, April, 1991.
- [182] Yancheng, Q., Changhong, W., Qiyong, W., Guangchng, M. *A New Robust servoing Algorithm: Teory and Experiment*. *Proceeding of the IEEE Conference on Control Applications 2003*, vol. 2, June 2003, pp. 1459-1462, 2003.
- [183] Yoshimi, B.H., and Allen, P.K. *Active Uncalibrated Visual Servoing*. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (San Diego), pp. 156-161, 1994.
- [184] Walker, M.W., Shao, L., Volz, R.A. *Estimating 3-D Location Parameters Using Dual Number Quaternions*. *CVGIP: Image Understanding* 54: 358-367, 1991.
- [185] Weiss, L.E., Sanderson, A.C. and Neuman, C.P. *Dynamic Visual Servo Control of Robots: An Adaptive Image-Based Approach*. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Vol. 2, pp. 662-668, 1985.
- [186] Weiss, L.E., Sanderson, A. C. and Neuman, C.P. *Dynamic Sensor-Based Control of Robots with Visual Feedback*. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, RA- 3 (5): pp. 404-417, 1987.
- [187] Wijesoma, S., Wolfe, D., and Richards, R. *Eye-to-Hand Coordination for Vision-Guided Robot Control Applications*. *International Journal on Robotics Research*, vol. 12, No 1, pp.65-68, 1993.
- [188] Wilson, W. *Visual Servo Control of Robots Using Kalman Filter Estimates of Robots Pose Relative to Work-Pieces*. *Visual servoing*. K Hashimoto Ed. Singapore: World Scientific, pp. 71-104, 1994.
- [189] Wilson, W.J., Willians, C.C. and Bell, G. *Relative End-Effector Control Using Cartesian Position Based Visual Servoing*. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol 12, No 5, 1996.
- [190] Wilson, W., Hull, C.W., and Janabi-Sharifi, F. *Robust Image Processing and Position-Based Visual Servoing*. M. Vincze & Hager Ed. "Robust vision for manipulation". *Spie/IEEE Series*, pp. 163-220, 2000.
- [191] Xu, G., and Zhang, Z. *Epipolar Geometry in Stereo, Motion and Object recognition. A Unified Approach*. Kluwer Academic Publishers. The Netherlands, 1996.
- [192] Zhang, Z. *Determining the Epipolar Geometry and its Uncertainty: A Review*. *International Journal of Computer Vision* 27(2), pp. 161-195, 1998.
- [193] Zhang, Z. *A Flexible New Technique for Camera Calibration*. 7<sup>th</sup> International Conference on Computer Vision, 1999.
- [194] Zhang, Z., Deriche, R., Faugeras, O., and Luong, Q.T. *A Robust Technique for Matching Two Uncalibrated Images Through the Recovery of the Unknown Epipolar Geometry*. *Artificial Intelligence* 78(1-2), pp. 87-119, 1995.

*Bibliografia.*

- [195] Zhang, Z., and Ostrowski, J. *Optimal Motion Planning in the Image Plane for Mobile Robots*. IEEE International Conference in Robotics and Automation, San Francisco, CA, 2000.
- [196] Zhang, Z. and Hanson, A.R. *Scaled Euclidean 3D Rreconstruction Based on Externally Uncalibrated Cameras*. IEEE Symposium on Computer Vision, Coral Gables, Floride, 1995.